

表現多様体と Casson 不変量

大阪大学 理学研究科 博士前期2年 稲垣友介

0 Introduction

3次元多様体群の $SU(2)$ -既約表現全体のなす集合の同値類は多様体としての構造を持ち、それは表現空間と呼ばれる。表現空間から構成される不変量に Casson 不変量というホモロジー3球面に対して定義される整数値不変量がある。この不変量は1985年に Casson により定義され、その後様々な分野との関係が認められ研究が進められてきた。この不変量は定義自体も独創的で大変興味深いものである。その構成法を紹介する。

1 表現多様体

$SU(2)$ の表現多様体を定義する。 M をコンパクト、向き付け可能な3次元多様体とする。 M の基本群の有限表示

$$\pi_1(M) = \langle t_1, \dots, t_n | \gamma_1, \dots, \gamma_p \rangle$$

が与えられる。 $\pi_1(M)$ の Lie 群 $SU(2)$ への表現全体を考える。

$$\text{Hom}(\pi_1(M), SU(2)) = \{ \rho : \pi_1(M) \rightarrow SU(2) | \text{homomorphism} \}$$

$\text{Hom}(\pi_1(M), SU(2))$ の各元は各生成元 t_i の像を決めてやれば一つ定まるので、表現 ρ には次の同一視が与えられる。

$$\rho : \pi_1(M) \rightarrow SU(2) \longleftrightarrow (\rho(t_i))_{1 \leq i \leq n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -\bar{b}_i & \bar{a}_i \end{pmatrix} \right\}_{1 \leq i \leq n} \in SU(2)^n \subset \mathbb{C}^{4n}$$

写像としての表現の捉え方のもとでは表現全体の成す集合がイメージしづらい。しかし一つの表現を \mathbb{C}^{4n} 内の一点と思えば、それは \mathbb{C}^{4n} に描かれる幾何的な対象として捉えることができる。さらに、 $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(M), SU(2))$ に対して、 t_i の積で表される関係子 γ_j の ρ による像は表現に制限を与える。すなわち、 $\rho(\gamma_j) = E$ の各成分が a_i, b_i で表される多項式方程式を定め、表現の変化に制限を与える。このようにして表現全体は代数的な集合と考えることができる。 $R(M) = \text{Hom}(\pi_1(M), SU(2))$ とおき、これを表現多様体と呼ぶ。

Casson 不変量の定義に用いられるのは既約表現全体のなす集合 $R^{irr}(M)$ である。この多様体の $SO(3)$ の共役作用による商をとったものを表現空間といい、 $\mathcal{R}(M) = R^{irr}(M)/SO(3)Conj$ で表す。

2 Casson 不変量

M をホモロジー球面 $\mathbb{Z}HS^3$ とし、種数 g の Heegaard 分解を $M = W_1 \cup_F W_2$ で与える。ここで各 W_i はハンドル体、 F は種数 g の閉曲面で各ハンドル体の境界である。

Lemma 1. $\mathcal{R}(W_i)$ は $3g - 3$ 次元の滑らかな開多様体、 $\mathcal{R}(F)$ は $6g - 6$ 次元の滑らかな開多様体である。

包含写像 $F \hookrightarrow W_i$ は多様体間の包含写像 $\mathcal{R}(W_i) \hookrightarrow \mathcal{R}(F)$ を誘導する。これにより $\mathcal{R}(W_i)$ は $\mathcal{R}(F)$ の部分多様体と見なされる。いくつかの議論により $\mathcal{R}(W_1) \cap \mathcal{R}(W_2)$ の $\mathcal{R}(F)$ における代数的交点数が定義され、しかも Heegaard 分解やアイソトピーの取り方によらないことも示される。

Definition 2. Casson 不変量 $\lambda : \mathbb{Z}HS^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$\lambda(M) = \frac{(-1)^g}{2} \#(\mathcal{R}(W_1) \cap \mathcal{R}(W_2))$$

で定義する。

Casson 不変量の定義式の $\mathcal{R}(W_1) \cap \mathcal{R}(W_2)$ は $\mathcal{R}(M)$ に等しく、したがってこの不変量はホモロジー球面の表現の個数を符号付で数えることに対応している。性質としては次の手術公式などが挙げられる。

Proposition 3. k を M 内の *knot* とする。このとき次が成り立つ。

$$\lambda\left(M + \frac{1}{m+1}\right) - \lambda\left(M + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \Delta_k''(1) \quad \text{up to sign}$$

ただし、 $m \in \mathbb{Z}$ 、 Δ_k は Alexander 多項式である。

3 今後考えていきたいこと

Casson 不変量は様々な形で拡張、一般化されている。(Casson-Walker-Lescop 不変量や有限型不変量、Heegaard-Floer 理論など) しかし、このように様々な分野との関わりが認められている中で、Casson 不変量の値のもつ幾何的な意味自体は、まだ明らかになっていない。Casson 不変量の値、またさらに一般的に表現空間の交わりがどのような幾何的意味を与えているか、私はこの問題について考えていきたい。

参考文献

- [1] N.Saveliev, *Lectures on the topology of 3-manifolds : an introduction to the Casson invariant 2nd*, de Gruyter, Germany, 2011

Geodesic lamination の Transvers Hölder cocycle

三口 雄大

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 修士 2 年

閉曲面に geodesic lamination λ が与えられると, λ に横断的 (transverse) な arc に対して可換群に値をとる transverse cocycle が定義できる.

\mathbb{R} -valued なものは, λ -transverse Hölder distribution $\mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ と対応している. これらは shearing cocycle と呼ばれ, λ に沿って曲面をずらす量と対応していて, 閉曲面の Teichmüller 空間を parameterize する手段を与える.

また, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ -valued なものは bending cocycle と呼ばれ, 3次元双曲多様体内の pleated surface において, pleating locus λ に沿って曲面を折り曲げる量と対応している.

ここでは, \mathbb{R} -valued な transverse cocycle についての定理を紹介する.

定義 1.

S を双曲計量 m を持つ閉曲面とする. S 上の m -geodesic lamination λ とは, simple な m -geodesic の直和で表される S の閉集合のことである.

双曲計量 m, m' に対して, m -geodesic lamination λ と m' -geodesic lamination λ' が homotopic であるとき, λ と λ' は同値であるとし, 双曲計量に依らず geodesic lamination を定義する.

geodesic lamination は包含関係について極大 (maximal) なもの考えることが多い. λ が maximal なとき, $S - \lambda$ は有限個の ideal triangle となる. 以下, λ は maximal であると仮定する.

定義 2.

G を可換群とする. G -valued λ -transverse cocycle α とは, λ に横断的な arc k に対して $\alpha(k) \in G$ を与える写像で, 以下を満たすものである.

- $k = k_1 \cup k_2$, $\text{int}k_1 \cap \text{int}k_2 = \emptyset$ のとき, $\alpha(k) = \alpha(k_1) + \alpha(k_2)$ (加法性)
- λ を保って homotopic な k, k' に対して, $\alpha(k) = \alpha(k')$ (λ -不変性)

定理 3.

λ -transverse Hölder distribution α は \mathbb{R} -valued λ -transverse cocycle $\alpha(k) = \int_k d\alpha$ と対応し, \mathbb{R} -valued λ -transverse cocycle α は次で定まる λ -transverse Hölder distribution α と対応する.

$$\int_k \varphi d\alpha = \alpha(k)\varphi(x_k^+) + \sum_d \alpha(k_d)(\varphi(x_d^-) - \varphi(x_d^+))$$

ただし, $\varphi : k \rightarrow \mathbb{R}$ を Hölder continuous function とし, k の始点, 終点を x_k^-, x_k^+ とする. また, $k - \lambda$ の成分 d の始点, 終点を x_d^-, x_d^+ とし, k_d は x_k^- と d 内の点を結ぶ k の部分 arc とする.

S の universal covering \tilde{S} をとり, λ の逆像を $\tilde{\lambda}$ と表す. $\tilde{S} - \tilde{\lambda}$ の成分の closure を plaque という. G -valued λ -transverse cocycle α は plaque P, Q に対して $\alpha(P, Q) \in G$ を与える写像で, 以下を満たすものと対応している.

- $\alpha(Q, P) = \alpha(P, Q)$ (対称性)
- $\alpha(P, Q) + \alpha(Q, R) = \alpha(P, R)$ (加法性)
- $\pi_1(S)$ の元 γ に対して, $\alpha(\gamma(P), \gamma(Q)) = \alpha(P, Q)$ ($\pi_1(S)$ -不変性)

定義 4.

双曲計量 m に対して, \mathbb{R} -valued λ -transverse cocycle σ_m を次のように定める.

$$\sigma_m(P, Q) = \theta^{gh}(g_0)$$

ただし, g を Q に近い P の境界 geodesic とし, P の残りの ideal vertex を g に射影した点 g_0 を原点とする. g を向きと原点を意識して \mathbb{R} と isometric に対応させ, P に近い Q の境界 geodesic h も g と同様に \mathbb{R} と対応させる.

また, P と Q を分ける $\tilde{S} - \text{int}P - \text{int}Q$ の成分 Σ 上に, P と Q を分ける $\tilde{\lambda}$ の geodesic 全体を拡張して得られる geodesic foliation \mathcal{G} を与える. \mathcal{H} を \mathcal{G} と直交する Σ 上の foliation とし, g の点を \mathcal{H} の flow で h に移す対応を θ^{gh} とする.

定理 5.

$\mathcal{T}(S) \ni m \mapsto \sigma_m \in \mathcal{H}(\lambda; \mathbb{R})$ は像への同相である.

また, 像は有限個の面で囲まれた open convex cone となる.

参考文献

- [1] F.Bonahon Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form
- [2] F.Bonahon Transverse Hölder distributions for geodesic laminations

A LOWER BOUND ON MINIMAL NUMBER OF COLORS FOR LINKS

ERI MATSUDO

In 1961, the n -coloring of knot was introduced by R.Fox. Nowadays, the minimal number of the colors on a diagram of knots and links. In 1999, Harary and Kauffman introduced an invariant $C_n(K)$ of an n -colorable knot K . For a knot, Nakamura, Nakanishi and Satoh gave a lower bound $\log_2 n + 1$ of the minimal number of colors for all effective n -colorable knot. We give a lower bound for effective n -colorable link.

Theorem 0.1. (Nakamura-Nakanishi-Satoh, 2013)

Let n be a prime odd number. For any n -colorable knot K , let $C_n(L)$ be the minimal number of the colors on a n -colored diagram of K . Then the following holds;

$$C_n(L) \geq 1 + \log_2 n$$

Theorem 0.2. (Nakamura-Nakanishi-Satoh, 2014)

Let n be a odd number. For any n -colorable knot K , let $C_n^*(L)$ be the minimal number of the colors on an effectively n -colored diagram of K . Then the following holds;

$$C_n^*(L) \geq 1 + \log_2 n$$

We give a lower bound for the minimal number of the colors for all effective n -colorings of a link with non-zero determinant.

Theorem 0.3. (Ichihara-Matsudo)

Let n be a natural number. For any n -colorable link L which has A , a coloring matrix of L , with $|A| \neq 0$, let $C_n^*(L)$ be the minimal number of the colors on an effectively n -colored non-split diagram of L . Then the following holds;

$$C_n^*(L) \geq 1 + \log_2 n$$

REFERENCES

- [1] Satoh. S, 5-COLORED KNOT DIAGRAM WITH FOUR COLORS, *Osaka J. Math.* **46**(2009), 939-948.
- [2] Oshiro. K, Any 7-colorable knot can be colored by four colors, *J. Math. Soc. Japan*, Vol.62, No.3(2010), pp.963-973.

GRADUATE SCHOOL OF INTEGRATED BASIC SCIENCES, NIHON UNIVERSITY, 3-25-40 SAKURAJOSUI, SETAGAYA-KU, TOKYO 156-8550, JAPAN

結び目と作用

福田瑞季

東北大学 理学研究科 数学専攻

1 結び目とは

以下簡単のため、 n 次元結び目とは S^n を S^{n+2} へ滑らかに埋め込んだ像であるとする。連続変形で移り合う結び目に関しては同一視して考える。2つの結び目が与えられたとき、同じものか区別することはとても重要である。例えば、区別する方法として補空間の基本群を調べる方法がある。標準的に S^{n+2} 次元球面に埋め込まれた n 次元結び目 (自明な結び目という) の補空間の基本群は \mathbb{Z} と同型である。では一般的に与えられた結び目で補空間の基本群は \mathbb{Z} と同型になるものは存在するのだろうかという疑問が湧いてくる。1次元結び目にかんして、1989年に Gordon-Luecke によって素な結び目は全て補空間の基本群で分類できることが知られている。また、3次元以上では自明でない結び目で、補空間の基本群が \mathbb{Z} となる結び目を構成することができる。2次元に関しては Unknotting conjecture と言われ未解決問題になっている。

2 特別な2次元結び目

2次元結び目に関して、spun 結び目と言われる結び目がある。この結び目は1次元の結び目を用いて構成されるが、spun 結び目の補空間の基本群は元の1次元結び目の補空間の基本群に一致する。後に Zeeman や Fox、Litherland によって m -twist spun 結び目や、roll 結び目、deformed spun 結び目と呼ばれる spun 結び目の一般化がなされる。この3つの結び目は元となる結び目の補空間の基本群に特別な関係式を加えた群になっている。また上の3つは構成方法から、補空間には free な S^1 作用が入っている。では free な S^1 作用を補空間に持つ2次元結び目は3つのうちのどれかになっているのだろうか。

3 補空間に S^1 作用を持つ2次元結び目

Effective かつ locally smooth な S^1 作用を持つ S^4 を考えると、orbit space は S^3 か D^3 になり、exceptional orbit は高々2種類存在する。Orbit space が D^3 のときは exceptional orbit は存在せず、fixed point の集合が D^3 の境界の2次元球面になる。Orbit space が S^3 のときは Fintushel によって exceptional orbit と fixed point の和集合は閉じた線分、もしくは単純閉曲線になっている。次の定理は twist spun 結び目の一般化にあたるので紹介する。

定理 (Pao). S^4 への *effective* かつ *locally smooth* S^1 作用があり、*orbit space* は S^3 であるとする。このとき、*exceptional orbit* と *fixd point* の和集合の引き戻しは 2 つの 2 次元球面の和集合であり、2 つの球面は 2 点の固定点で横断的に交わっている。

上の定理は S^3 の中の閉じた線分、もしくは単純閉曲線を S^1 作用で引き戻しているが、twist spun 結び目の構成方法と似ている。実際、定理の中の球面の 1 つが、特別な場合では twist spun と一致する。

参考文献

- [1] R. Fintushel, "Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres," Duke Math. J. 43, 63–70 (1976).
- [2] C. Gordon and J. Luecke, "Knots are determined by their complements," J. Amer. Math. Soc. 2, no. 2, 371–415 (1989).
- [3] R. A. Litherland, "Deforming twist-spun knots," Trans. Amer. math. Soc. 250, 311-331 (1979).
- [4] P. S. Pao, "Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots," Topology 17, 291-296 (1978).
- [5] D. Rolfsen, "Knots and Links," Math. Lec. Series, 7, Publish or Perish, Inc., Berkeley, (1976).
- [6] J. Stallings, "On topological unknotted spheres," Ann. of Math. Second Series, Vol. 77, No. 3, pp. 490-503 (May, 1963).
- [7] E. C. Zeeman, "Twisting spun knots," Trans. Am. math. Soc. 115, 471-495 (1965).

位相的場の量子論について

浅野知紘*

1 Atiyah の公理

ここでは元論文 [1] にある Atiyah による位相的場の量子論 (以下, TQFT) の公理を振り返る^{*1}.

定義 1.1. $(d+1)$ 次元 TQFT とは,

- 各 d 次元有向閉多様体 Σ に対し \mathbb{C} 上の有限次元線形空間 $Z(\Sigma)$ を対応させ,
- 各 $(d+1)$ 次元有向コンパクト多様体 M に対しその境界を $\partial M \cong -\Sigma_- \amalg \Sigma_+$ と表示したとき^{*2}, 線形写像 $Z(M) : Z(\Sigma_-) \rightarrow Z(\Sigma_+)$ を対応させる

枠組みであり、次の公理をみたすものことである.

- A0 向きを保つ微分同相について自然にふるまう.
- A1 任意の d 次元有向閉多様体 Σ に対し, 自然な同型 $Z(-\Sigma) \cong Z(\Sigma)^*$ が存在する.
- A2 任意の d 次元有向閉多様体 Σ_1, Σ_2 に対し, 自然な同型 $Z(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) \cong Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)$ が存在する.
- A3 任意の d 次元有向閉多様体 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 及び Σ_1 から Σ_2 への同境 M_{12} と Σ_2 から Σ_3 への同境 M_{23} に対し, M_{12} と M_{23} を Σ_2 に沿って貼り合わせた多様体を M_{13} としたとき, $Z(M_{13}) = Z(M_{23}) \circ Z(M_{12})$ となる.
- A4 空集合 \emptyset を d 次元多様体とみなしたとき, $Z(\emptyset) = \mathbb{C}$ である.
- A5 任意の d 次元有向閉多様体 Σ に対し, $Z([0, 1] \times \Sigma) = \text{id}_{Z(\Sigma)}$ である.

補足 1.2. この公理は有向閉 d 次元多様体を対象とし同境 (の同型類) を射とする圏からベクトル空間の圏への関手 Z であって, 多様体の非交和をベクトル空間のテンソル積に対応させるものとしても書ける.

補足 1.3. $(d+1)$ 次元有向閉多様体 M を空集合から空集合への同境とみなしたとき, $Z(M) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は定数倍写像であるが, その定数は有向多様体 M の微分同相不変量になる.

2 モジュライ空間の幾何と Casson 不変量

2.1 モジュライ空間のコホモロジーと TQFT

有向閉多様体 X 上のなんらかの「場」のなすモジュライ空間 RX が有向閉多様体になっている状況を考える. M が Σ_- から Σ_+ への同境である場合, 「場」を制限することで滑らかな写像 $r_{\pm} : RM \rightarrow R\Sigma_{\pm}$ が得られる

* 東京大学数理科学研究科修士課程 2 年 E-mail: tasano@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*1} 必ずしも元論文に忠実ではない.

^{*2} このとき M は Σ_- から Σ_+ への同境であるという.

とする。このとき、 $Z(\Sigma) = H^*(R\Sigma; \mathbb{C})$ と定め、 $Z(M)$ をモジュライ空間のポアンカレ双対と r_{\pm} が誘導する押し引きの合成によって定義することで、 $(d+1)$ 次元 TQFT を定義できる (詳細は講演中に解説する)。

補足 2.1. この構成においてはポアンカレ双対性が非常に重要である。実際、ポアンカレ双対さえ成立するならば普通のコホモロジー論ではなく、一般コホモロジー論を用いることもできる^{*3}。また、抽象的な鎖複体のコホモロジーとしてではなく、空間のコホモロジーとしての記述を TQFT が持つ場合の利点としては他にも、コホモロジー作用素の振る舞いや (対称性がある場合に) 同変版の理論を考察する余地がある点が挙げられる。

2.2 Casson 不変量

Casson 不変量は 3 次元整ホモロジー球面に対する (整数値の) 不変量である。Casson 不変量のある方法での定義のアイデアは、2.1 節の構成において $d = 2, RX = \text{Hom}(\pi_1(X), SU(2))/SU(2)$ として TQFT を作り、補足 1.3 のように不変量を得ることである (ここで X は 2 次元か 3 次元の (連結) 有向多様体であり、商は $SU(2)$ の元による共役で割っている)。ただし、一般にこの RX は特異点を持つため、ポアンカレ双対が使えず、2.1 節の議論は破綻する^{*4}。Casson 不変量の正確な定義のためには、その特異点周りの考察が必要である。そのため Casson 不変量の定義はそれが難しくない限られた同境 (3 次元整ホモロジー球面が Heegaard 分解されている状況) のみを扱って行われる。この方法での Casson 不変量の定義については [2] を参照されたい。

3 最後に私が漠然と気にしている抽象的な問いをいくつか

- 2.2 の例ではモジュライ空間は特異性を持った。そのような場合にも 2.1 節における定式化に耐えうるような (汎用性の高い) コホモロジー理論は何か?
- 具体例に目を向けることを必ずしもせずとも $(d+1)$ 次元 TQFT は興味深い概念である。その分類については、 $d = 1$ の場合については有限次元可換 Frobenius 代数が一一対応する。 d が大きい場合にも高次の圏を用いる文脈^{*5}においては cobordism hypothesis として知られている。しかし、一方で TQFT 的な具体的な不変量を考察する場合においては、多様体やその間の同境に制限をかける必要があったり、向き以外の付加構造を込めて考えるべき状況が少なくないと思われる。そのような状況下での TQFT の分類など抽象論からの考察はどこまで可能か?
- 具体的な場合には、モジュライ空間にシンプレクティック構造が入り、Floer 理論を使いたくなる状況がある。このことと、その TQFT を ETQFT 的に捉えることができるかという問題の関連。

参考文献

- [1] M. Atiyah, “Topological quantum field theories”, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., (68) 175-186, 1988
[2] N. Saveliev, “Lectures on the Topology of 3-Manifolds: An Introduction to the Casson Invariant”, Walter de Gruyter, 2012

^{*3} ただし、そのような良い具体例があるかは別の問題である。

^{*4} [1] にもコメントがある。

^{*5} 境界に余次元の高い部分を持つ多様体 (角付き多様体) をも考察の対象にできるよう、TQFT の概念を拡張する。それは ETQFT(Extended TQFT) とよばれる。

3次元多様体の基本群と円板の埋め込み

関野 希望

東京大学大学院数理科学研究科 修士1年

ある空間の基本群が自明だからといって、その空間内の任意の単純閉曲線が円板を囲むとは限りません。しかし3次元多様体の場合は、単純閉曲線にある条件を付け加えると円板を囲みます。

ここではこれに関係した事実を紹介します。

定理 (Dehn の補題)

M : 3次元多様体 D : 2次元円板 $f: D \rightarrow M$ 連続写像 とし、更に ∂D の D における正則近傍 N で、 $f|_N$ (制限) が埋め込みであり、 $f^{-1}(f(N)) = N$ となるものがあるとする。

このとき、 M の 2次元円板 D_0 で $\partial D_0 = \partial D$ となるものが存在する。

この定理は次の定理の系として示すことができます。

定理 (ループ定理)

M : 境界つき 3次元多様体 F : ∂M 内の曲面

$i\# : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ 包含 $i: F \rightarrow M$ から導かれる基本群間の準同型

N : $\pi_1(F)$ の正規部分群 とする。

このとき、 $\text{Ker}(i\#) = N \neq \emptyset$ であれば、 M に適切に埋め込まれた 2次元円板 D_0 で $\partial D_0 \subset F$ であり、 $[\partial D_0] \notin N$ となるものが存在する。

(ただし $[\partial D_0]$ は ∂D_0 が代表する $\pi_1(F)$ の元)

更に、高次元については、次があります。

定理（球面定理）

向き付け可能 3次元多様体 M の、2次ホモトピー群 $\pi_2(M)$ が自明でないなら、 M は本質的な（つまり 3次元球を囲わない）2次元球面を持つ。

向き付け不可能な場合でも、次が成り立ちます。

定理（射影平面定理）

3次元多様体 M の、2次ホモトピー群 $\pi_2(M)$ が自明でないなら、 M は本質的な 2次球面または両側射影平面を含む。
(ただし M 内の曲面 F が両側とは、 F の M での正則近傍が $F \times I$ に同相なこと。)

参考文献

[1] Jennifer Schultens, Introduction to 3-Manifolds (3.5)

[2] John Hempel, 3-manifolds (chapter 4)

[3] 森本 勘治, 3次元多様体入門 (12章)

平面曲線特異点の実モース化のトロピカル幾何における アナロジー

東北大学大学院理学研究科数学専攻
高橋卓大

1 トロピカル曲線の定義

2変数トロピカル多項式 $\tau(x, y)$ を

$$\tau(x, y) := \max_{(i,j) \in A} \{ix + jy + a_{ij}\}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{Z}^2 \text{は有限集合}$$

の形をした多項式とする。これは連続で区分線形な凸関数 $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と見なせる。トロピカル多項式を関数として見なしたものをトロピカル多項式関数と呼ぶ。

定義 1.1 (トロピカル曲線). トロピカル多項式関数 $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が滑らかでない点全体 V_τ を τ の定める平面トロピカル曲線という。

平面トロピカル曲線 V_τ は \mathbb{R}^2 内のある条件を満たす距離グラフであり、その組み合わせ的な性質は定義多項式 τ の **Newton 多面体**

$$\Delta_\tau := \text{Conv}\{(i, j) ; a_{ij} \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

の次のように得られる細分と双対であることが知られている: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ の多面体 $\tilde{\Delta}_\tau$ を

$$\tilde{\Delta}_\tau := \text{Conv}\{(i, j, t) ; (i, j) \in A, t \leq a_{ij}\}$$

で定める。射影 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $\tilde{\Delta}_\tau$ の全てのコンパクトな面の和から Δ_τ の部分多面体への射影を誘導する。これによって Δ_τ の部分多面体による細分が定められる。

定理 1.2 (Mikhalkin[3]). S_τ と V_τ に次のような対応が存在する:

- (1) $\mathbb{R}^2 \setminus V_\tau$ の成分は、細分の頂点と 1 対 1 対応する,
- (2) V_τ の辺と直交する S_τ の辺が一意に存在する,
- (3) V_τ の n 叉の頂点と S_τ に属する n 個の側面を持つ部分多面体が 1 対 1 に対応する.

この定理をもって、細分 S_τ はトロピカル曲線 V_τ に組合せ的双対であるという。

2 平面曲線の特異点

ここでは平面曲線特異点のトポロジーに関する必要事項をまとめておく。

解析函数芽 $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ の特異点に付随して Milnor 束と呼ばれるファイバー束が構成でき、そのファイバーを Milnor ファイバーと呼ぶ。特異点が孤立しているとき、このファイバーの n 次 Betti 数を Milnor 数といい、 $\mu(f)$ で表す。これは特異点の (位相) 不変量として知られている [4]。

定義 2.1 (特異点の Newton 図形とコンビニエント). 解析函数芽 f の原点での Taylor 展開を $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} c_j z^j$ とする。凸包

$$\text{Conv}\left(\bigcup_j \{j + \mathbb{R}_+^n; c_j \neq 0\}\right) =: \Gamma_+(f)$$

を原点における f の **Newton 図形** という。 $\Gamma_+(f)$ のコンパクトな面、または頂点の和集合のことを **Newton 境界** といい、 $\Gamma(f)$ で表す。 $\Gamma_-(f)$ を $\Gamma(f)$ 上の錐であって、原点をその頂点に持つようなものとする。

また、 $\Gamma(f)$ が各座標軸と交わる時 f は **コンビニエント** であるという。

定義 2.2 (Newton 非退化). 任意の面 $\Delta \subset \Gamma(f)$ に対し、方程式

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n} = 0$$

が $(\mathbb{C}^*)^n$ に解を持たないとき、 f は **Newton 非退化** であるという。ここで $f_\Delta(z) := \sum_{j \in \Delta} c_j z^j$ である。

定理 2.3 (Kouchnirenko[2]). 解析函数芽 f が Newton 非退化かつコンビニエントであれば、

$$\mu(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k k! V_k$$

が成り立つ。ここで V_k は $\Gamma_-(F)$ の k 次元面で原点と交わるものの体積の和である。ただし $V_0 = 1$ とする。

さらに、Milnor ファイバーの n 次ホモロジー群のホモロジーサイクルを消滅サイクルと呼び、これらの交叉行列は特異点の特徴づけを与える。平面曲線特異点においては、実モース化と呼ばれる変形によって、変形された代数曲線の実部から消滅サイクルの交叉行列が得られることが知られている [1]。特に、 $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ の孤立特異点の実モース化した多項式函数芽の定める曲線芽の実部 $C_s|_{\mathbb{R}^2}$ に対し

$$\mu(f) = \#(\text{double points}) + \#(\text{bounded regions})$$

が成り立つことが知られている。

3 トロピカル曲線上の実モース化のアナロジー

次の定理は前述の平面曲線特異点の実モース化のトロピカル類似になっている.

定理 3.1 (T.). Newton 非退化でコンビンエントな孤立特異点を持つ複素代数多項式 f に対し, トロピカル多項式 τ_f で, τ_f から得られるトロピカル曲線 V_{τ_f} のある部分距離グラフ M_f で

$$\mu(f) = \#(4\text{-valent vertices}) + \#(\text{bounded regions})$$

を満たすものが存在する. 特に f が被約であれば, f の 2 重点数 $\#(\text{double points})$ は M_f の 4 叉の頂点の個数に等しい. すなわち,

$$\#(\text{double points}) = \#(4\text{-valent vertices}).$$

現在の研究は, 上の定理を足掛かりとして, 今より扱いやすい“トロピカル特異点”を構成したいと考えている.

参考文献

- [1] V.I.Arnold, S.M.Gusein-Zade, A.N.Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Vol.2, Monographs in Mathematics 83, (1988).
- [2] A.G.Kouchnirenko, *Polyédres de Newton et nombres de milnor*. Invent. Math., **32** (1976),1-31.
- [3] G.Mikhalkin, *Enumerative Tropical Algebraic Geometry in \mathbb{R}^2* . J.Amer.Math.Soc.**18** (2005), 313-377.
- [4] J.W.Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Math. Studies Vol.61 (1974), Princeton Univ. Press.

Colored Jones 多項式の特特殊値と多面体

東京工業大学 理工学研究科 博士1年 村上広樹

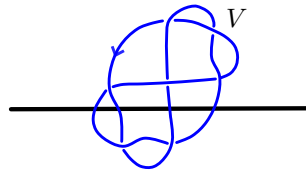
私は Colored Jones 多項式という不変量の研究をしている。私が Colored Jones 多項式の特特殊値の振る舞いに興味を持ったきっかけは、Jones 多項式に 1 の原始 N 乗根を代入した時の値が興味深い性質を示すことを学んだことである。私が計算したのは 2 乗根と 3 乗根を代入した時の振る舞いである。特に、交代結び目の colored Jones 多項式に 2 乗根を代入した時に、root polytope と呼ばれる多面体と密接な関わりがあることがわかった。本稿ではその関わりを述べる。

1 色つき Jones 多項式

まず、色つき Jones 多項式について述べる。定義を述べるにはスペースが足りないので、詳しくは参考文献 [2] をご覧いただきたい。

定義 1.1 (colored Jones 多項式). K を絡み目とする。2 以上の自然数 N によって *index* 付けされた *Laurent* 多項式の列 $J_{K,N}(q)$ を N 次元 *colored Jones* 多項式という。

注 1.2. 上の定義中の N はカラーと呼ばれており、これは絡み目図式上に乗せられた $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ 加群 V の次元である。ただし、 $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ から得られる量子展開環である。



定理 1.3. K を *framed link*, N をそのカラーとする。このとき次が成り立つ。

$$J_{K,N}(q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{N-1-j}{j} J_{K^{N-1-2j}}(q).$$

ここで、 K^{N-1-2j} は K の $N-1-2j$ ケーブルを表す。

定理 1.4 (M).

$$J_{K,N}(-1) = \begin{cases} 1 & (N : \text{odd}) \\ \det(K) & (N : \text{even}). \end{cases}$$

2 Root polytope

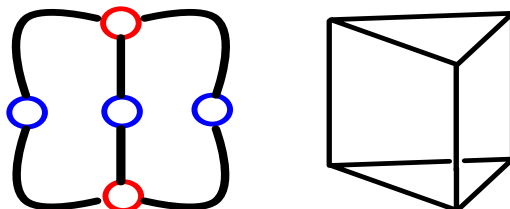
次に root polytope について述べる. Root polytope は二部グラフに対して定義される Euclid 空間内の多面体である.

定義 2.1. G を *color classes* が E と V の二部グラフとする. $e \in E$ と $v \in V$ に対して, \mathbf{e} と \mathbf{v} を Euclid 空間 $\mathbb{R}^E \oplus \mathbb{R}^V$ の標準的生成元とする. このとき, G の *root polytope* Q_G を

$$Q_G = \text{Conv}\{\mathbf{e} + \mathbf{v} \mid ev \text{ is an edge of } G\}$$

によって定める. ここで $\text{Conv } A$ は 集合 A を含む最小の凸集合 (*convex hull*) を表す.

例 2.2. 左図の二部グラフに対して, 右図の多面体が対応する. (二部グラフが6つの辺を持つことから, *root polytope* は6つの頂点を持つことが定義よりわかる.)



3 結果

K を交代結び目, D をその図式とする. D に checkerboard coloring を施すことにより, 二部グラフが得られる. この二部グラフから得られる root polytope を Q とするとき, 次が成り立つ.

定理 3.1 (M). Q の体積は, $\det(K)$ に一致する.

(証明の概略). Q の三角形分割を考える. Q の三角形分割に必要な単体の数は G の双対グラフの極大木の数と等しく, さらに極大木の数は Kauffman states の数と等しい. K は交代的であるという仮定から, Kauffman states の数は $\det(K)$ と一致する. ここまでで Q の体積が $\det(K)$ に比例することが示せたが, 単体の体積が 1 になるように体積要素を定めれば主張が成り立つ. \square

注 3.2. $\det(K)$ は *colored Jones* 多項式に -1 を代入した際に現れるので, 弱いながらも *colored Jones* 多項式と *root polytope* の関連が示せたことになる.

例 3.3. K を三葉結び目とする. この結び目から得られる二部グラフは 例 2.2 のものと同じであり, 従って対応する *root polytope* も 例 2.2 のものと同じである. この多面体の体積は 3 であり, $\det(K) = 3$ という結果とあう.

参考文献

- [1] T. Kálmán and Hitoshi Murakami, Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial, arXiv:1305.4925 [math.GT]
- [2] R. Kirby and P. Melvin, The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, *Inventiones mathematicae* Volume 105, Issue 1 , pp 473-545
- [3] A. Postnikov, Permutohedra, associahedra, and beyond. arXiv:math/0507163v1 [math.CO] 7 Jul 2005.
- [4] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62.

多様体及び道の空間上の Morse 理論

山崎雄一郎

中央大学理工学研究科数学専攻修士 1 年

1 多様体上の Morse 理論

M を n 次元 C^∞ 多様体とする.

Definition 1. M 上の C^∞ 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点が全て非退化である時, f を Morse 関数という.

Proposition 1. M をユークリッド空間 \mathbb{R}^N に埋め込んで \mathbb{R}^N の部分多様体とみなす. この時ほとんど全ての $p \in \mathbb{R}^N$ に対し $f_p: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_p(x) = \|x - p\|^2$ は Morse 関数である.

したがって任意の多様体上に Morse 関数が存在することがわかる.

Lemma 1. (Morse) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse 関数, p を f の臨界点とする. この時 p のある近傍 U における座標近傍 (y^1, \dots, y^n) で, すべての i に対して $y^i(p) = 0$, かつ U 上至る所恒等式

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

が成り立つようなものが存在する. ここで λ は p における f の指標である.

Theorem 1. f を M 上の Morse 関数とし, 各 sublevel set

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$$

は compact であるとする. このとき M は指標 λ の各臨界点に対して次元 λ の cell を一つ持つような CW-複体と同じ homotopy-type を持つ.

Remark 1. この主張は M が compact でなく臨界点が無限個存在する場合であっても成り立つ. (Whitehead の定理を用いる.)

2 道の空間への応用

ここでは M は (測地的に) 完備な n 次元リーマン多様体とし, $\Omega(M; p, q)$ で M の中の p から q への区分的に滑らかな道全体のなす集合を表すとする.

Definition 2. エネルギー関数 $E: \Omega(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\omega \in \Omega(M; p, q)$ に対し

$$E(\omega) = \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$$

によって定義する.

エネルギー関数 E の臨界点 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を測地線という.

Definition 3. 測地線 γ に沿うベクトル場 J が *Jacobi* 場であるとは J が *Jacobi* 微分方程式

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, J)V = 0$$

を満たすときをいう。ただし $V = \frac{d\gamma}{dt}$ で R はリーマン曲率テンソルを表す。また $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ で $a \neq b$ であるとする。もし $t = a$ と $t = b$ で 0 となる *Jacobi* 場が存在するならば, p と q は γ に沿って共役であるという。

Theorem 2. (*Morse* 理論の基本定理) M を完備なリーマン多様体とし $p, q \in M$ をどのような測地線に沿っても共役でないような 2 点とする。このとき $\Omega(M; p, q)$ は p から q への指標 λ の各測地線に対応して, 次元 λ の一つの cell を含んでいる可算 CW-複体と同じ homotopy-type を持つ。

Remark 2. この定理は $\Omega(M; p, q)$ を無限次元多様体, エネルギー関数を $\Omega(M; p, q)$ 上の *Morse* 関数とみなすことで, 道の空間において Theorem 1 と同様の結果が得られることを主張している。

参考文献

- [1] モース理論, J. Milnor, 志賀浩二訳, 吉岡書店
- [2] モース理論の基礎, 松本幸夫, 岩波書店
- [3] *Morse Theory and Floer Homology*, Michele Audin, Mihai Damian, Springer

折り紙

法橋厚美

奈良女子大学大学院数学専攻修士2年

1 背景

折り紙は数学的には、紙でできた平面領域 R をあらかじめ指定された線分で折ってできる立体図形と定式化される。これらの線分は折れ線とよばれる。折れ線には山折り線と谷折り線の2種類がある。平面領域 R に山折りまたは谷折りが指定されたものを展開図という。

伝統的な折り紙によってインスパイヤーされた折りたたみのパターンは実生活においても、(例えば建築であるとか、ロボット工学であるとか、医学などでも) 多くの応用がある。特に、平坦折りと呼ばれる、最終形態が平らに折れる折り方は応用の観点からも非常に有用である。

わたしはこのような折り紙を組織的に構成する方法について勉強している。今回は私自身が考えたこのような折り紙のある構成方法について紹介する。

2 Lang-Bateman による平坦折りの構成法

論文 [2] の中で、Lang-Bateman は次のような平坦折りの展開図の構成方法を紹介している。

Lang-Bateman の構成方法

- 1) まず平面の正多角形によるタイル張りを考える。
- 2) 全てのタイルに対して、それらをそれぞれの中心に対して同じ割合だけ縮小する。
- 3) それらの縮小されたタイルを 2) と同様に、それぞれの中心に対して同じ角度だけ回転させる。
- 4) このとき、もともとのタイルの1つの辺は縮小された、2つのタイルの辺に対応する。これらの辺は平行でまたその長さは等しくなるので、これらを2辺とする平行四辺形ができる。この平行四辺形を新しいタイルとして導入する。

以上の操作によって得られるタイル張りの各辺に山折りまたは谷折りを指定してやると平坦折りの展開図が得られる。

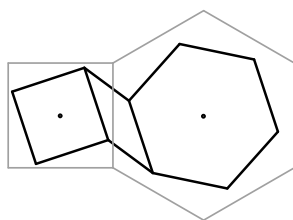


Figure 1:

3 私の考案した構成法

私は、2のLang-Batemanの構成方法の考え方を参考に、次のような平坦折りの構成方法を考えた。

- 1) まず中心に正 n 角形があり、それに接する n 個の三角形と、無限個の正方形と台形によるFigure 2のようなタイル張りを考える。
- 2) 全ての正方形のタイルに対して、辺の長さは変えずに、同じ割合で菱形につぶしていく。(このとき、台形のタイルの形は変わらない。)

以上の操作によって得られるタイル張りの各辺に図のように山折りまたは谷折りを指定してやると平坦折りの展開図が得られる。

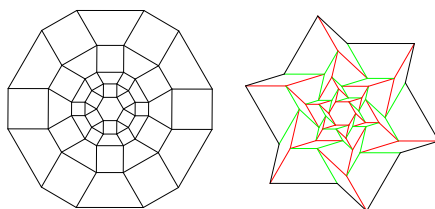


Figure 2:

参考文献

- [1] 入井美紀, 2次元トーラスの相似構造による、一般化されたミウラ折りの構成, 2012年度 奈良女子大学大学院数学専攻 修士論文
- [2] Robert J.Lang and Alex Bateman, Every Spider Web Has a Simple Flat Twist Tessellation, In: Origami⁵, Fifth International Meeting of Origami, CRC Press

Genus of a knot

入山 陽介

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 修士一年

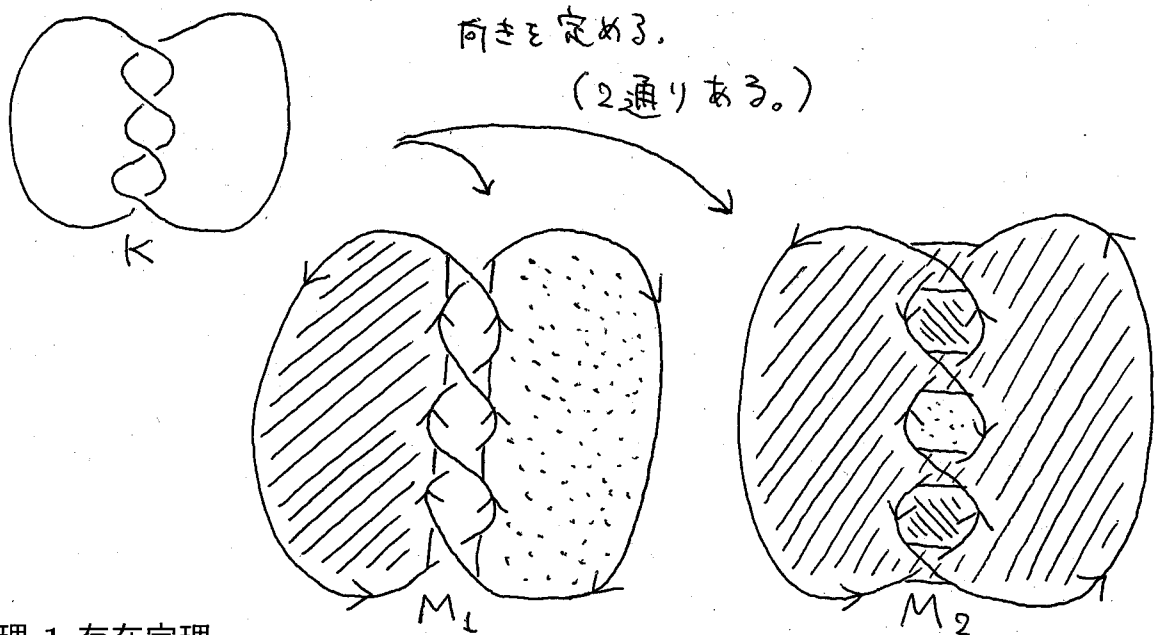
はじめに

genus (種数) とは、閉曲面を分類する上で最も重要な数の一つです。そしてそれは、結び目 (もしくはリンク) に対しても定義できます。では、結び目の *genus* とはどのようなもので、どのような性質をもつのか。私の知っている範囲で紹介したいと思います。

定義 (Seifert surface)

結び目またはリンク K に対する *Seifert surface* とは、連結で、向き付け可能で、 K を境界に持つコンパクトな曲面である。(但し、このとき K に向きを定める。)

例



定理 1 存在定理

\mathbb{R}^3 または S^3 内の全ての結び目もしくはリンクは Seifert surface をはることができる。

定義

\mathbb{R}^3 または S^3 内の一次元の結び目もしくはリンクである K の genus (以後 $g(K)$) とは、 K の Seifert surface のうち、最小の genus を持つものを M としたときの M の genus (以後 $g(M)$) である。

定義 (Seifert circle)

結び目またはリンクの Seifert surface を考えるとき、全ての交差点において向きを考慮しながら曲線を繋ぎなおすことで交差を解消する。できた有限個の閉じた曲線を *Seifert circle* と呼ぶ。

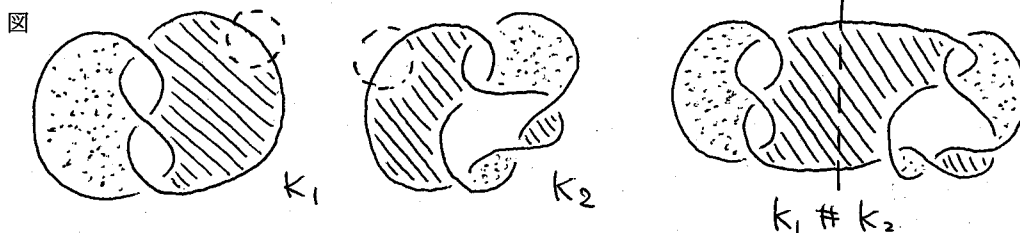
定理 2

リンクの Seifert surface を一つ考えるとき、 n をリンクの要素の数、 c を交差の数、 s を Seifert circle の数とすると、 $g(M) = 1 - (s + n - c)/2$ である。

例の場合、定理 2 により $g(M_1) = 1$ 、 $g(M_2) = 0$ で $g(K) = 0$ とわかる。

定理 3

\mathbb{R}^3 または S^3 内の結び目の genus は加法性を持つ。つまり $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ となる。(但し、 $\#$ は結び目の連結和を表す。)



定理 3 により、genus が 1 である結び目は素な結び目であり、任意の結び目は素な結び目の和であることがわかる。(但し、素な結び目は、それを二つの結び目の連結和として考えると、必ず一方が自明な結び目になる結び目である。)

参考文献

- [1] D.Rolfsen, Knots and links, 1976, AMS Chelsea publishing.
- [2] 河野俊丈, 新版 組みひもの数理, 2009, 遊星社.

モースの不等式

杉山 佑樹

中央大学大学院 理工学研究科 数学専攻 修士1年

ここでは、モース級数やモースの不等式について記述する。そのためにまず、Jacobi ベクトル場と焦点について述べる。

1 Jacobi ベクトル場

M を完備でパラコンパクト C^∞ -多様体とする。

定義 1.1 写像

$$V : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

が測地線 g の変分であるとは、次の条件を満たすときをいう。

- (1) V は C^∞ -写像
- (2) $V(t, \alpha)$ は M の測地線
- (3) $V(t, 0) = g$

定義 1.2 測地線 g に沿ったベクトル場 Y_t が Jacobi ベクトル場であるとは、 g の変分 V が存在して、

$$Y_t = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} V(t, \alpha) \right|_{\alpha=0} \quad (t \in \mathbb{R})$$

であるときをいう。以下、 g に沿った Jacobi ベクトル場を J_g と表す。

注意 1.1 J_g は、次の Jacobi の微分方程式の解の空間として特徴づけられる。

$$Y_t'' + R(X_t, Y_t)X_t = 0$$

ただし Y_t'' は g に沿った Y の 2 階共変導関数、 X_t は g に沿った接ベクトル場、 $R(X_t, Y_t)$ は X_t, Y_t の曲率公式を表す。

2 焦点

定義 2.1 N を M の滑らかな部分多様体とする。測地線分 $g : [0, a] \rightarrow M$ が (M, N) 、あるいは、 $M \bmod N$ の測地線分であるとは、次の条件を満たすときをいう。

- (1) g の始点は N 上にある。
- (2) g の始点における方向は N に垂直である。

N に関する J_g の部分空間を J_g^N と表す。

定義 2.2 ベクトル場 Y_t が J_g^N に含まれるとは, g の変分 V が存在して,

- (1) $Y_t = \frac{\partial}{\partial \alpha} V(t, \alpha) \Big|_{\alpha=0} \quad (t \in \mathbb{R})$
- (2) $V(0, \alpha) \in N$
- (3) $\frac{\partial}{\partial t} V(t, \alpha) \Big|_{t=0} \in N_q^\perp \quad [q = V(0, \alpha)]$

であるときをいう. ただし N_q^\perp は M_q における N_q の直交補空間を表す.

定義 2.3 s を $M \bmod N$ の測地線分とする. J_s^N の部分空間が s の終点で 0 になる Jacobi 場から成っているとき, この部分空間を焦点核といい, $\Lambda^N(s)$ で表す. また,

- (1) $\dim \Lambda^N(s) > 0$ のとき, s を M における N の焦点線分という.
- (2) 焦点線分の終点を M における N の焦点という.
- (3) M における N の焦点の集合を焦点集合という.

例 2.1 $M = \mathbb{R}^3, N = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$ とする. このとき, M における N の焦点集合は z 軸である.

命題 2.1 s を (M, N) の測地線分とする. このとき, N に関する s の指数

$$\lambda^N(s) = \sum_{s' \subset s} \dim \Lambda^N(s')$$

は常に有限整数である.

3 モース級数とモースの不等式

(M, N) の焦点集合にない点を (M, N) の正則点という.

定義 3.1 $S(M, N, P)$ を (M, N) の, P を終点とする測地線分の集合とする. (M, N, P) のモース級数を次で定義する.

$$\mathcal{M}(M, N, P; t) = \sum t^{\lambda^N(s)} \quad [s \in S(M, N, P)]$$

ここで $\lambda^N(s)$ は, 命題 2.1 の式で定義される.

定義 3.2 $\Omega = \Omega(M, N, P) = \{u : [0, 1] \rightarrow M; \text{区分的に正則で弧長が助変数 } t \text{ に比例する}\}$ と定義する. ただし $u(0) \in N, u(1) \in M$ とする.

$H(\Omega, k)$ を Ω の k 係数の特異ホモロジーとする. k が体ならば

$$P(\Omega; k; t) = \sum_{n \geq 0} \dim H_n(\Omega; k) t^n$$

は k に関する Ω のポアンカレ級数である.

定理 3.1 (M, N, P) のモース級数が存在するならば, k に関する Ω のポアンカレ級数が存在する. さらに,

$$\mathcal{M}(M, N, P; t) - P(\Omega; k; t) = (1+t)B(k; t)$$

である. ここで $B(k; t)$ は非負係数の形式べき級数である.

注意 3.1 $\mathcal{M}(M, N, P; t) = \sum_{i \geq 0} m_i t^i, P(\Omega; k; t) = \sum_{i \geq 0} p_i t^i, B(k; t) = \sum_{i \geq 0} b_i t^i$ とおくと,

$$m_i - p_i = b_i + b_{i-1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots; b_{-1} = 0)$$

が成り立つ. 特に,

$$\begin{aligned} m_0 &\geq p_0 \\ m_1 - m_0 &\geq p_1 - p_0 \\ m_2 - m_1 &\geq p_2 - p_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

が成り立ち, これがモースの不等式である. この不等式系は定理 3.1 と同値である.

定理 3.2 (M, N, P) のモース級数が存在し, t の奇数べきがないとき, 任意の k に対して,

$$\mathcal{M}(M, N, P; t) = P(\Omega; k; t)$$

が成り立つ. 特に $H(\Omega)$ は, ねじれない群である.

参考文献

- [1] R. Bott, *An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups*, Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p.251 - 281
- [2] 戸田宏, 三村護 著, リー群の位相 下, 紀伊國屋書店

パーシステントホモロジー

草野 元紀 (東北大学大学院理学研究科数学専攻 M2)*

概要

ホモロジーが図形の“穴”を取り出す道具だと捉えるのなら、パーシステントホモロジーは図形の“穴”とその“大きさ”を取り出す道具である。この講演ではパーシステントホモロジーの数学的な基礎と関連する話題を紹介する。

1. パーシステントホモロジー

\mathbb{R}^d の有限集合 X を $X_a := \bigcup_{x \in X} B(x; a)$ に変換することでフィルトレーション $\mathbb{X} = \{X_a \mid X_a \subset X_b \text{ for } a \leq b \in \mathbb{R}\}$ を構成する。ただし、 $B(x; a) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| \leq a\}$ 、 $X_a := X$ ($a \leq 0$) とする。このとき、体係数 1p 次ホモロジー群 $H_p(X_a)$ と、包含写像 $X_a \hookrightarrow X_b$ が誘導する線形写像 $v_a^b : H_p(X_a) \rightarrow H_p(X_b)$ を考える。ホモロジー群の生成元 $\alpha \in H_p(X_a)$ に対し、 $v_a^b(\alpha_0) = \alpha$ なる $\alpha_0 \in H_p(X_b)$ が存在する最小の b を α の発生時刻、 $v_b^d(\alpha) = 0$ なる最小の d を α の消滅時刻という。この発生消滅時刻の組 (b, d) を集めたものによってパーシステントホモロジーを定める。図1の1次ホモロジー群の場合、発生消滅時刻の組の集合は $\{(2, 3), (2, 5), (3, 4)\}$ である。

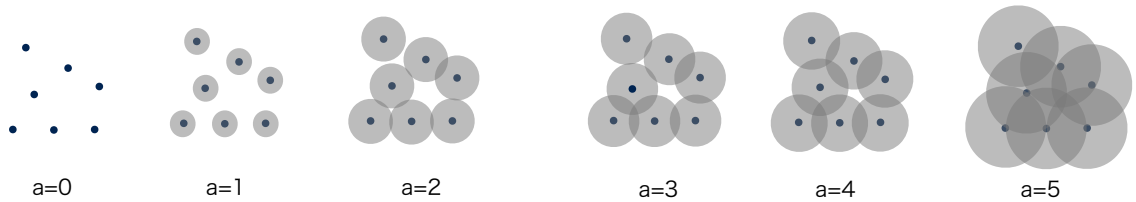


図 1: $a = 2$ の時に発生した 2 つの穴のうち、左の小さい穴は $a = 3$ で消滅し、右の大きい穴は $a = 5$ で消滅する。

一般に、ベクトル空間 U_a と線形写像 $u_a^b : U_a \rightarrow U_b$ が

$$u_a^a = \mathbb{1}_{U_a} (\text{恒等写像}), \quad u_b^c \circ u_a^b = u_a^c \quad (a \leq b \leq c \in \mathbb{R})$$

を満たす時、 $\mathbb{U} = (U_a, u_a^b)$ をパーシステント加群という。先ほどの例では、 $H_p(\mathbb{X}) = (H_p(X_a), v_a^b)$ がパーシステント加群になる。パーシステント加群は圏の表現論から直和 $\mathbb{U} = \bigoplus_j \mathbb{I}[b_j, d_j]$ ($b_j \leq d_j$) に分解でき、この組 (b_j, d_j) を \mathbb{R}^2 へプロットすることで多重集合 $D(\mathbb{U}) = \{(b_j, d_j) \in \mathbb{R}^2 \mid b_j \leq d_j\}$ を構成する。これと対角線集合 $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ を合わせた集合 $D(\mathbb{U}) = D(\mathbb{U}) \cup \Delta$ を \mathbb{U} のパーシステント図という。

パーシステントホモロジーは ChomP[8] や PHAT[17] などの計算機上で計算可能である。統計解析ソフトの R でも phom や TDA というパッケージで計算することができる。

* e-mail: genksn@gmail.com

¹ 体係数を考えるのは圏の表現論を用いるためである。さらに、計算機を用いる際に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ だと視覚化しやすかったり、 \mathbb{R} の方が最適化問題などを解きやすいなどの理由がある。

2. パーシステントホモロジーに関連する話題

2.1. 逆問題

X, Y がある距離空間の有限部分集合の時,

$$d_B(D(H_p(\mathbb{X})), D(H_p(\mathbb{Y}))) \leq d_H(X, Y)$$

となる [7]. ただし, d_B, d_H はボトルネック距離, ハウスドルフ距離を表す.

これは, データをパーシステント図に写す変換は1-リプシッツ連続であることを述べている. ということは, 局所的な微分を考えることが出来て, 故に, 逆写像定理が使える. これにより, 与えられたパーシステント図から元となった幾何データを決めることができる [12]. 与えられたホモロジー群から元の図形を決められないことを考えると, パーシステントホモロジーの優位性を確認できる.

2.2. 統計的データ解析

$S \subset \mathbb{R}^d$ が (a, b) -standard を満たし, そこから n 個の点を i.i.d にとりその集合を X_n とする. すると $n \rightarrow \infty$ のとき almost surely で次の式が成り立つ [6].

$$P \left(d_B(D(H_p(S)), D(H_p(\hat{X}_n))) < C \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1/b} \right) \rightarrow 1 \quad (P \text{ は確率.})$$

これは, サンプル点をたくさん取ってくることで, それらのパーシステント図は (計測できないかもしれない) 真のデータ S のパーシステント図に近づくことを述べている.

応用上, 計測したデータのパーシステント図を見て, データの分類を行うことを考えたい. その際に, パーシステント図をベクトル化をすることで統計的に扱うことができる. パーシステント図を [3] では Landspace という L^p 関数に, [2] ではパーシステント図を初期値と見た時の熱方程式の解である $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 関数にしている. 関数は (無限次元の) ベクトルなのでバナッハ空間値の確率変数と見ることによって統計学への展開が可能である.

また, 機械学習分野でよく使われるカーネル法を使うと, ベクトル化の際に現れる関数の形を陽に知ることなく, 効率的に既存の統計的データ解析手法を適用することができる [15].

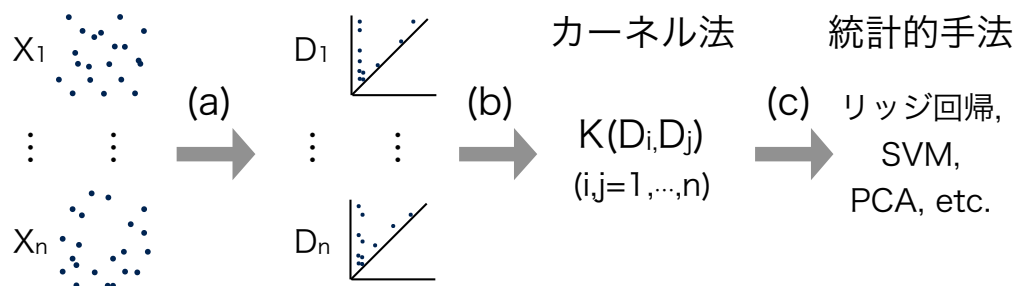


図 2: (a): データ X_i をパーシステント図 D_i に変換. (b): パーシステント図のカーネル関数 $K(D_i, D_j)$ を計算. (c): カーネル法により既存の統計的データ解析手法をパーシステント図に適用.

2.3. 時系列

データが時系列 $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ の場合を考える。つまり、これまではデータを一つ固定していたが、データが時事刻々と変化する場合を考える。もし時系列データ $\{X_t\}$ がフィルトレーションの関係 $X_a \subset X_b$ を満たせば、通常のパーシステントホモロジーの理論が使える。しかし一般にはそうではないため、 $X_a \hookrightarrow X_a \cup X_b \hookrightarrow X_b$ として包含関係を入れる。これを用いたパーシステントホモロジーの拡張は zigzag persistence² として知られており、 A_n 型の籠の表現論により定式化される [5]。また、Auslander-Reiten 籠を用いた理論の拡張、計算機上の実装も研究されている [11]。

2.4. 実データへの応用

パーシステントホモロジーを始め、データの幾何構造に注目したデータ解析は位相的データ解析 (Topological data analysis, TDA) として認識されている。[10, 14] ではセンサーの局所座標のリップス複体のパーシステントホモロジーからセンサーネットワークの被覆状況を判定した。[13] はパーシステントホモロジーの日本語の解説書であり、タンパク質の構造解析を紹介している。[16] ではガラスやアモルファスの原子座標からパーシステント図を求めることで、液体個体にはない特有の幾何構造をパーシステント図内の曲線として見出した。他に、Ayasdi[1]³ は数学者により立ち上げられた TDA の企業であり、mapper[18] のアプローチによる高次元データの可視化が医療やビッグデータ解析に役立っている。

3. おわりに

パーシステントホモロジーは $H_p(X)$ を $\{H_p(X_a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ にしただけなので、これ自体は大したことがないと思うかもしれない。しかし現在、数学に限らず様々な分野の人がパーシステントホモロジーを用いて研究を行っている。その理由は計算機の進歩によりパーシステントホモロジーが実際に計算できるようになったことや、図形の頑健な幾何特徴を取り出すのに適しているからだと考えられる。応用を見据えた研究が大半である一方で、圏論的アプローチ [4] や cosheaf[9], Floer-Novikov 理論 [19] などの純粋数学としての研究もある。

パーシステントホモロジーは発案されて 10 年も経っていないが、その有用性が理解され幅広く利用されている。その分勉強すべきことは多いが、様々なことができるのはこの分野の強みである。

² 個人的には、zigzag persistence は動画のホモロジーを定義していると思っている。

³ 高度に抽象的な数学によって世間をアッと賑わせているのはわくわくします。

参考文献

- [1] Ayasdi の HP. <http://www.ayasdi.com/>
- [2] U. Bauer, S. Huber, R. Kwitt, and J. Reininghaus. A Stable Multi-Scale Kernel for Topological Machine Learning. arXiv:1412.6821.
- [3] P. Bubenik. Statistical Topological Data Analysis using Persistence Landscapes. *Journal of Machine Learning Research* **16** (2015) 77-102.
- [4] P. Bubenik, V. de Silva, and J. Scott. Metrics for generalized persistence modules. arXiv:1312.3829.
- [5] G. Carlsson and V. de Silva. Zigzag Persistence. *Foundations of Computational Mathematics* **10** (2010) 367–405.
- [6] F. Chazal, M Glisse, C. Labruère, and B Michel. Convergence rates for persistence diagram estimation in Topological Data Analysis. *ICML (2014)* 163–171.
- [7] F. Chazal, V. de Silva, and S. Oudot. Persistence stability for geometric complexes. *Geometriae Dedicata* **173** (2014) 193–214.
- [8] Chomp の HP. <http://chomp.rutgers.edu/>
- [9] Justin Curry. Sheaves, cosheaves and applications. Thesis, University of Pennsylvania, 2014.
- [10] V. de Silva and R. Ghrist. Coverage in sensor networks via persistent homology. *Algebraic & Geometric Topology* **7** (2007) 339–358.
- [11] E. Escolar and Y. Hiraoka. Persistence Modules on Commutative Ladders of Finite Types. arXiv:1404.7588.
- [12] M. Gameiro, Y. Hiraoka, and I. Obayashi. Continuation of Point Clouds via Persistence Diagrams. arXiv:1506.0341.
- [13] 平岡裕章. タンパク質構造とトポロジー パーシステントホモロジー群入門. 共立出版 (2013).
- [14] Y. Hiraoka and G. Kusano. Coverage Criterion in Sensor Networks Stable under Perturbation. arXiv:1409.7483.
- [15] 草野元紀, 平岡裕章, 福水健次. パーシステント図のカーネル関数. 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 応用数学.
- [16] T. Nakamura, Y. Hiraoka, A. Hirata, E. Escolar, and Y. Nishiura. Persistent Homology and Many-Body Atomic Structure for Medium-Range Order in the Glass. arXiv:1502.0744.
- [17] PHAT の HP. <https://code.google.com/p/phat/>
- [18] G. Singh, F. Méholi, and G Carlsson. Topological Methods for the Analysis of High Dimensional Data Sets and 3D Object Recognition. *Eurographics Symposium on Point-Based Graphics* (2007).
- [19] Michael Usher and Jun Zhang. Persistent homology and Floer-Novikov theory. arXiv:1502.07928.

関数解析と補間定理

比良 直美

奈良女子大学大学院 人間文化研究科 数学専攻 2年

1 補間定理について

私は関数解析から始まり、現在は補間空間論に焦点を当てて奮闘しております。

解析学において基本となる不等式の多くはある種の作用素がある Lebesgue 空間を他の Lebesgue 空間にうつす有界作用素であることを示すものです。これらの不等式の多くは Lebesgue 空間の指数の逆数が適当な 1 次関係を保ちながら変化します。そして許される変化の中で指数が両極端をとるときの証明は比較的容易ですが、中間の場合はそうでないものがあります。こういった中間の指数について言及するものが補間定理です。

2 2つの補間定理について

定理を 2 つ紹介したいと思います。1 つ目の定理は L^p 空間で定められた Marcinkiewicz の補間定理を Lorentz 空間へ拡張するものです。2 つ目の定理では Stein と Weiss によって示された測度の変化を伴う L^p 空間における補間定理の特別な場合を扱います。

定理 1 $1 \leq p_0 < p_1 < \infty, 1 < q_0, q_1 < \infty, q_0 \neq q_1$ とする。T が

$$\|Tf\|_{q_i, \infty, w} \leq C \|f\|_{p_i, 1, v}, \quad \forall f \in L^{p_i, 1}(v), i = 0, 1$$

を満たす線形作用素ならば、 $0 < t < 1$ と $1 \leq s \leq \infty$ に対して定数 C が存在し、

$$\|Tf\|_{q_t, s, w} \leq C \|f\|_{p_t, s, v}, \quad \forall f \in L^{p_t, s}(v)$$

を満たす。ただし、

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

定理 2 $1 \leq p_0 < p_1 < \infty, 1 < q_0, q_1 \leq \infty, 0 < r_0, r_1 < \infty, p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1, p_i \leq q_i$ とする。T が

$$\|Tf\|_{q_i, \infty, w} \leq C_i \|f\|_{p_i, v^{r_i}}, \quad \forall f \in L^{p_i}(v^{r_i}), i = 0, 1$$

を満たす線形作用素ならば、 $0 < t < 1$ に対して、定数 $C > 0$ が存在し、

$$\|Tf\|_{q_t, w} \leq C \|f\|_{p_t, v^{r_t}}, \quad \forall f \in L^{p_t}(v^{r_t})$$

を満たす。ただし、

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad r_t = (1-t)r_0\left(\frac{p_t}{p_0}\right) + tr_1\left(\frac{p_t}{p_1}\right).$$

これらについて、定理 1 で Marcinkiewicz の補間定理を拡張したように定理 2 の拡張が存在するのでは？と
考えてみます。すなわち以下のような考えです。

Conjecture 1 T, p_i, q_i, r_i ($i = 0, 1$) は定理 2 の仮定を満たすとする。このとき、 $0 < t < 1, 1 \leq s \leq \infty$ に対し
て定数 $C > 0$ が存在して、

$$\|Tf\|_{q_t, s, w} \leq C \|f\|_{p_t, s, v^{r_t}}, \quad \forall f \in L^{p_t, s}(v^{r_t})$$

を満たす。ただし p_t, q_t, r_t は定理 2 と同様に定義する。

実はこれがいつも正しいとは言い切れません。このことを 2 つの命題によって示すことを行っています。

参考文献

- [1] ELIDA V. FERREYRA, 「ON A NEGATIVE RESULT CONCERNING INTERPOLATION WITH
CHANGE OF MEASURES FOR LORENTZ SPACES」, 1997.
- [2] 小松彦三郎, 「Fourier 解析」, 岩波書店, 1978.
- [3] J.Bergh, J.Löfström, 「Interpolation Spaces An Introduction」, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New
York, 1976.

Koszul 双対性の一般化と Riemann 面の幾何

杉山 聡

1 Koszul 双対性

Koszul 双対性とは、あるクラスの有限次元代数に関する双対性である。今回は、籓 (えびら) の 2 次関係式付き道代数について紹介する。

定義 1.1 有向グラフを籓 (quiver) という。具体的には、 $\vec{\Delta} = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$ であって、 Δ_0, Δ_1 は集合、 $s, t: \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ は集合の写像であるとき、これを籓という。

籓 $\vec{\Delta}$ に対して、 Δ_0 を頂点集合といい、その元を頂点という。 Δ_1 を矢集合といい、その弦を矢という。矢 α に対して、 $s(\alpha)$ を α の始点 (source)、 $t(\alpha)$ を α の終点 (target) という。また、 $i, j \in \Delta_0$ と、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Delta_1$ について、 $s(\alpha_1) = i, t(\alpha_n) = j, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ を満たすとき、 $w = (i|\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n|j)$ のことを i から j の長さ n の道であるという。また、 (ii) と書いて、 i から i への長さ 0 の道という。

定義 1.2 K を体とし、 $\vec{\Delta}$ を籓とする。この時、籓の道代数 (path algebra of a quiver) $K\vec{\Delta}$ を以下のように定義する。

まず、線型空間として、 $K\vec{\Delta} := \bigoplus_{w: \vec{\Delta} \text{ の道}} Kw$ であって、道の積は、 $w = (i|\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n|j), w' = (k|\beta_1 \beta_2, \dots, \beta_m|l)$ について、 $j = k$ のとき $ww' := (i|\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n \beta_1 \beta_2, \dots, \beta_m|l)$ とし、そうでない場合は 0 として定義する。

また、 $\rho = \sum c_k w_k \in K\vec{\Delta}$ ($c_k \in K, w_i: \vec{\Delta}$ の長さ 1 以上の道) は、すべての道の始点と終点がそれぞれ一致しているとき、関係式という。関係式の組 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ に対して、籓の関係式付き道代数 (path algebra with relation) $K(\vec{\Delta}, \rho)$ を、 $K(\vec{\Delta}, \rho) := K\vec{\Delta}/(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ の生成する両側イデアルと定める。

関係式の組 ρ を構成する関係式に登場する道の長さがすべて 2 の時、これを 2 次の関係式といい、 $K(\vec{\Delta}, \rho)$ を籓の 2 次関係式付き道代数という。

この籓の 2 次関係式付き道代数について、以下の 2 通りで Koszul 双対が定義され、それらが一致することが知られている。

定義 1.3 $\vec{\Delta}$ は、その道代数が有限次元となるような籓とし、 ρ を 2 次関係式の組とする。

このとき、 ρ^\perp を、次のようにとる。まず、 $P_2 := \bigoplus_{w: \vec{\Delta} \text{ の長さ } 2 \text{ の道}} Kw$ とし、この直和分解について自然な計量を入れる。 ρ^\perp は、2 次の関係式であって、 ρ^\perp の生成する P_2 の部分空間が、 ρ の生成する部分空間の直行補空間となっているものとする。このもとで、 $K(\vec{\Delta}, \rho^\perp)$ を $K(\vec{\Delta}, \rho)$ の Koszul 双対という。

$A := K(\vec{\Delta}, \rho)$ に対して、 $P(1), P(2), \dots, P(n)$ を、有限生成右 A 加群のなす Abel 圏 $\text{mod-}A$ の直既約射影対称の同型類の代表元のリストとする (有限個になることが知られている)。このとき、 $A^! := \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{D^b(A)}(P(i), P(j))$ と定める ($D^b(A)$ は A の導来圏)。これを、 A の Koszul 双対という。

定理 1.4 上記の設定で、 $A^!$ と $K(\vec{\Delta}, \rho^\perp)$ は自然に同型となる。特に、 $A^{!!} \cong A$ である。

2 Riemann 面の幾何との関係

以上の話は、すべて純代数的な話であった。この特別な場合について、Riemann 面の幾何と関係がある場合がある。境界つき Riemann 面 M と、その中の S^1 に微分同相な部分多様体の組 $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ を考える。このとき、 L_1 は $H_1(M; \mathbb{Z})$ の 0 でない元を代表しているとき、Fukaya-Seidel 圏 $FS^\triangleright(L)$ というものが定義できる。上手く L を選んだ場合、ある箭 $\vec{\Delta}$ とある 2 次の関係式 ρ が存在して、その関係式付き道代数 $K(\vec{\Delta}, \rho)$ とみなせる場合がある。

このとき、その Koszul 双対は、 L と Hurwicz 同値な部分多様体の組 L' (L をなす部分多様体に適切な Dehn twist を施し、順序を入れ替えたもの) の Fukaya-Seidel 圏と関係がある場合があることがわかっている。

Abstract 執筆時はまだ詳しくわかっていないことが多いが、TFS では、それまでに分かったことを報告しようと思う。

参考文献

[Ka12] 梶浦 宏成, 数物系のための圏論 導来圏, 三角圏, A_∞ 圏を中心に, SGC ライブラリ 75, サイエンス社.

[Se08] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, European Math. Soc., 2008.

ホモロジカル・スケイン代数におけるデー・ツイストの対数

辻俊輔 (東京大学博士1年)

概要

曲面におけるゴールドマン・リー代数のブラケット ([1] 参照)、ゴールドマン・リー代数の基本群の群環への作用 ([2] 参照)、テュラエフ・スケイン代数 ([8] 参照)、カウフマン・スケイン代数 ([5] 参照) の研究の雛形となるホモロジカル・スケイン代数の説明をする。

1 導入

曲面の写像類群の研究において、フィルター付きの有限生成でないリー代数が多く情報を持つことがわかってきた。特にリー代数の作用によるデーツイストの公式はその研究において重要な役割を担う。

ゴールドマン・リー代数 ([1] を参照) は、基本群の共役類を基底とした自由加群にリー代数の構造をいれたリー代数である。このゴールドマン・リー代数は基本群の群環への作用があることが [2] によりわかった。さらに、[2], [3], [4] により完備ゴールドマン・リー代数の基本群の完備群環への作用によるデー・ツイストの公式が

$$t_c = \exp(\sigma(\frac{1}{2}(\log(c))^2)) : \widehat{\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma)} \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi_1(\Sigma)}$$

得られた。さらに、向き付け不可能曲面でも類似の公式が得られる。([6] を参照)

カウフマン・ブラケットスケイン代数は自然にリー代数の構造を持つ。さらにカウフマン・ブラケット・スケイン代数に自然に作用する。この作用で完備スケイン代数のデー・ツイストの公式が

$$t_c = \exp(\sigma(\frac{-A + A^{-1}}{4\log(-A)}(\cosh^{-1}(-\frac{c}{2}))^2)) : \widehat{\mathcal{S}(\Sigma, J)} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}(\Sigma, J)}$$

と得られた。詳しくは [7] を参照。

これらの研究の雛形となるホモロジカル・スケイン代数の説明をすることによりデーツイストの対数の表示がどのようなものか簡単に説明する。ホモロジカル・スケイン代数とは (ここでは) ある向き付けられた閉曲面における一次のホモロジー群の有理数体上の群環にブラケットを定義してポアソン代数とみなしたものである。

2 ホモロジカル・スケイン代数の定義

\mathbb{Z} を整数環、 \mathbb{Q} を有理数体、 S を種数 g の閉曲面とする。 $H = H_1(S, \mathbb{Z})$ を S の \mathbb{Z} を係数とした一次のホモロジー群とする。これは $2g$ 個の基底をもった \mathbb{Z} 上の自由加群となる。これにポアンカレ・デュアルティをつかいインターセクションフォーム $\mu : H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義する。 H にシンプレクティック基底を $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ ととる。すなわち、 H の基底 $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ は $\mu(a_i, b_j) = -\mu(b_j, a_i) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} は $i = j$ のとき 1 その他で 0) を満たす。 H の元について群の演算を積で表す。 H の任意の元はある整数 $i_1, i_2, \dots, i_g, j_1, j_2, \dots, j_g$ で $a_1^{i_1} b_1^{j_1} a_2^{i_2} b_2^{j_2} \dots a_g^{i_g} b_g^{j_g}$ と書き表される。 $\mathbb{Q}H$ を H の \mathbb{Q} 上の群環とする。

$\mathbb{Q}H = \mathbb{Q}[a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g]$ のブラケット $[\cdot, \cdot] : \mathbb{Q}H \times \mathbb{Q}H \rightarrow \mathbb{Q}H$ を $[x, y] = \mu(x, y)xy$ ($x, y \in H$) を \mathbb{Q} 上、双線型に拡張して定める。これについて次が成り立つ。

命題 2.1 ($\mathbb{Q}H, [\cdot, \cdot]$) はポアソン代数になる。すなわち次を満たす。

任意の $x, y, z \in \mathbb{Q}H$ について次の等式が成り立つ

$$\begin{aligned} [x, x] &= 0, \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0, \\ [x, yz] &= [x, y]z + y[x, z]. \end{aligned}$$

上の3番目の式をライプニッツ・ルールと呼ぶ。このように $\mathbb{Q}H$ にポアソン代数の構造を入れたものをホモロジカル・スケイン代数と呼ぶ。

3 完備ホモロジカル・スケイン代数とデーンツイストの対数

ホモロジカル・スケイン代数を完備化する。完備化したものをホモロジカル・スケイン代数と呼ぶ。 $aug : \mathbb{Q}H \rightarrow \mathbb{Q}$ を $x \in H \mapsto 1$ を \mathbb{Q} 代数準同型に定める。 $I^k \mathbb{Q}H = (\ker aug)^k$ を $\ker aug$ の元の k 個の積から生成されるイデアルとする。 $\varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Q}H / (I^i \mathbb{Q}H)$ を完備ホモロジカル・スケイン代数として $\widehat{\mathbb{Q}H}$ とかく。ライプニッツ・ルールより、完備ホモロジカル・スケイン代数にブラケットを拡張することができる。

γ を S の単純閉曲線とする。 $c \in H$ を γ が表すホモロジー群の元とする。ただし、2通りあるがどちらでもよい。 $x \in \mathbb{Q}H$ で $\log(t_\gamma)(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} (1 - t_\gamma)^i(x)$ と定義する。 $x, y \in \widehat{\mathbb{Q}H}$ で $\log(t_\gamma)(xy) = \log(t_\gamma)(x)y + x\log(t_\gamma)(y)$ を満たす。このとき次の定理を得る。

定理 3.1 デーンツイストの公式を次で得る $\log(t_\gamma)(\cdot) = [\frac{1}{2}(\log c)^2, \cdot] : \widehat{\mathbb{Q}H} \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}H}$.

このようにデーンツイストの対数がブラケットの定義で表示することができた。

参考文献

- [1] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface groups representations*, Invent. Math. 85, 263-302 (1986).
- [2] N. Kawazumi and Y. Kuno, *The logarithms of Dehn twists*, to appear in: *Quantum Topology*, preprint, arXiv: 1008.5017 (2010).
- [3] N. Kawazumi and Y. Kuno, *Groupoid-theoretical methods in the mapping class groups of surfaces*, preprint, arXiv: 1109.6479 (2011).
- [4] G. Massuyeau and V. Turaev, *Fox pairings and generalized Dehn twists*, preprint, arXiv:1109.5248v3(2012) to appear in Ann. Inst. Fourier.
- [5] J.H.Przytycky, *Skein modules of 3-manifolds*, Bull. Ac. Pol. Mat; 39(1-20), 1991, 91-100.
- [6] S. Tsuji, *The logarithms of Dehn twists on non-orientable surfaces*, preprint, arXiv:1405.2161(2014).
- [7] S. Tsuji, *Completed Kauffman bracket skein algebras and mapping class groups*, in preparation.
- [8] Turaev, V. G., *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24 no. 6(1991).

剛体折紙

松島杏奈

奈良女子大学大学院数学専攻修士2年

1 背景

折紙は数学的には、紙でできた平面領域 R をあらかじめ指定された線分で折ってできる立体図形と定式化される。これらの線分は折れ線とよばれる。折れ線には山折り線と谷折り線の2種類がある。平面領域 R に山折りまたは谷折りが指定されたものを展開図という。

特に、面を一切曲げないで折ることができる（各面を硬い鉄板、折り目を蝶番で代用できるもの）ような折紙を剛体折紙という。わたしはこのような折紙について勉強している。今回は、剛体折紙の2つの例と、この勉強の中ででてきた紙袋定理と呼ばれる定理について紹介する。

2 剛体折紙の2つの例

2.1 ミウラ折り

図のような折紙をミウラ折りという。ミウラ折りは剛体折紙になっており、次のような特徴をもつ。

- すべての折り目が同時にたたまれる（自由度1）
- 一枚の平坦な紙を折りたたむことで、別の平坦な形状に変えることができる（平坦折りになっている）

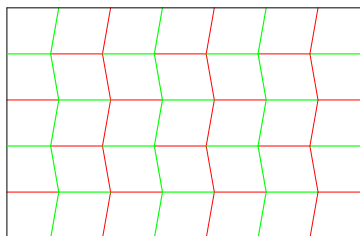


Figure 1: ミウラ折り展開図

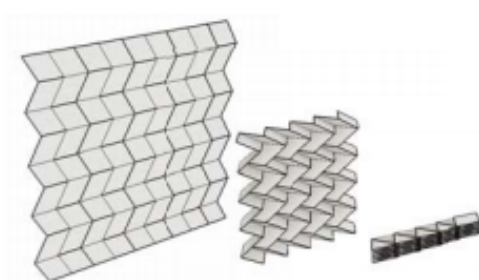


Figure 2: ミウラ折り

2.2 四角形のねじり折り

図のような折紙を四角形のねじり折りという。折りたたむと元の正方形の紙がその4分の1の大きさの正方形になる。

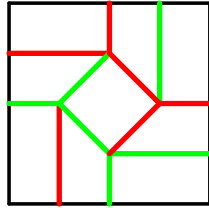


Figure 3: ねじり折り 開いた状態

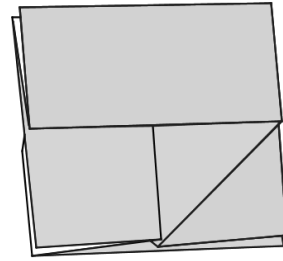


Figure 4: ねじり折り 閉じた状態

3 紙袋定理とその証明に用いる補題

ここでは、紙袋定理と呼ばれる定理とその証明に用いられる補題を紹介する。

定理（紙袋定理）[1]

図のような紙袋を考える。これは右の絵のように平坦に折りたたむことができる。これを折紙と考えて、その各面は剛体できているとする。このとき、この折紙は完全に開いているか、完全に閉じているかのどちらかで、その中間の状態にはなることができない。

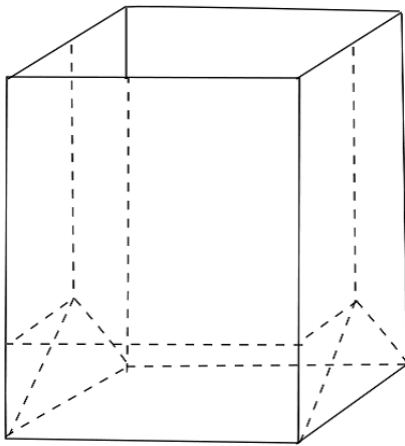


Figure 5: 完全に開いた状態

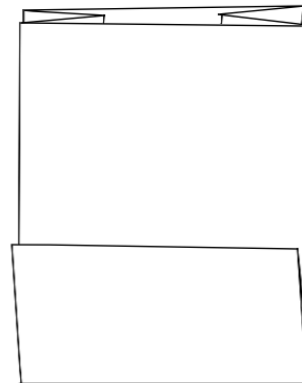


Figure 6: 完全に閉じた状態

以下では、この定理の証明に用いる補題を紹介する。

補題 1 (次数 4 補題)

今、紙袋は剛体折紙であったとする。紙の端でないところにある頂点（つまり 360 度を紙に囲まれた頂点）で 4 本の折り目がぶつかっているとき、相対する折り目の二面角は等しい。

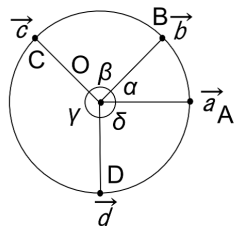


Figure 7: 折る前

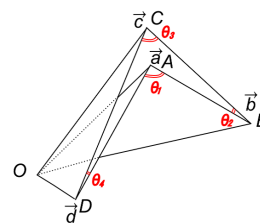


Figure 8: 折っている時

補題 2 (プラス記号補題)

今、紙袋は剛体折紙であったとする。4 つの折り目が垂直にぶつかっていて、ある相対するペアが非平坦角に折られているときもう一方のペアは平坦に折られていなければならない。

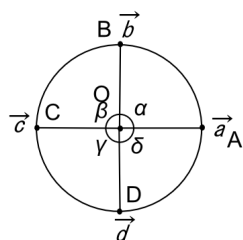


Figure 9: 折る前

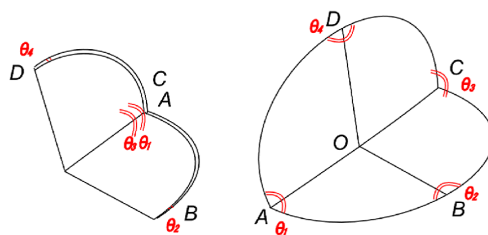


Figure 10: 折っている時

補題 3 (次数 3 補題)

今、紙袋は剛体折紙であったとする。ちょうど 3 本の折り目が頂点 O につながっていて、どの 2 個も同一直線上にないとき、これらの折り目の二面角はどれも π で、実質的に折られていない。つまり、頂点 O は本当の頂点ではなく、頂点 O の近傍は平坦である。

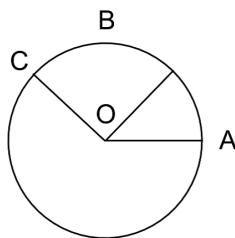


Figure 11: 次数 3 の頂点

補題4 (紙袋の隅補題)

今、紙袋は剛体折紙であったとする。Figure12 で隅 O につながっている垂直な折紙に沿った二面角 θ_1 が 0 ならば、隅全体が平坦に折られている。

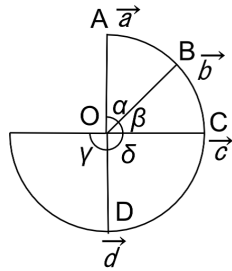


Figure 12: 平面図

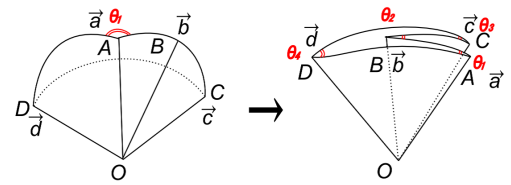


Figure 13: 立体図

参考文献

- [1] Joseph O' Rourke, How to fold it The mathematics of linkages,origami,and polyhedra, Cambridge University Press
- [2] 入井美紀, 2次元トーラスの相似構造による、一般化されたミウラ折りの構成, 2012年度 奈良女子大学大学院数学専攻 修士論文
- [3] TACHI, T.2009.Generalization of rigid-foldable quadrilateral-mesh origami.Journal of the International Assoniation for Shell and Spatial Structures 50 ,3(December),173-179.

非有向曲面の写像類群について

小林竜馬

石川工業高等専門学校

非有向曲面とは、Möbius の帯や Klein の壺のように、裏表のない曲面のことである。人は誰しも裏と表の二面性を持っているが、彼らにはそれがない。著者は、彼らのそういうところに惹かれているのかもしれない。

さて、 N_g^b で種数 g 、境界成分 b 個のコンパクトな非有向曲面を表す。ただし、 $N_g = N_g^0$ とする。 $\mathcal{M}(N_g^b)$ で N_g^b の写像類群、すなわち、 N_g^b 上の微分同相写像のイソトピー類全体からなる群を表す。ただし、この微分同相写像は境界上恒等写像であり、そのイソトピーも N_g^b の境界上恒等写像とする。 $\mathcal{M}(N_g^b)$ は N_g^b の整係数一次ホモロジー群 $H_1(N_g^b; \mathbb{Z})$ に自然に作用する。この作用 $\mathcal{M}(N_g^b) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g^b; \mathbb{Z}))$ の核を $\mathcal{I}(N_g^b)$ で表し、 N_g^b の Torelli 群と呼ぶ。

著者は、東京理科大学の廣瀬進氏との共同研究で $\mathcal{I}(N_g)$ の生成系を与えた。そして、今回、新たに $\mathcal{M}(N_g^b)$ の生成系を与えた。

高次 K 群の明示的表示とその応用

狩野 隼輔

東京工業大学 理工学研究科 数学専攻 修士 1 年

高次 K 群の定義は複雑で、実際に応用する際、その元を取って扱うことは不可能に近い。ここでは、“Exact Cube” というものを使ってそれを明示的に構成し、その応用を紹介する。

1 Exact Cube

完全圏 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \mathbf{E})^1$ に対し、“Quillen Q -構成” と呼ばれる新しい圏 $Q\mathcal{P}$ を構成する方法がある²。

命題 1.1 ([1] Theorem 1)

小完全圏 \mathcal{P} が、零対象 $0 \in \mathcal{P}$ を持つとき、その Q -構成の分類空間の基本群は、Grothendieck 群に等しい。すなわち、

$$\pi_1(BQ\mathcal{P}, \{0\}) \cong K_0(\mathcal{P})$$

ただし、 $BQ\mathcal{P}$ は small category $Q\mathcal{P}$ の分類空間で、 $\{0\}$ はその 0 からなる点。 □

この同型を念頭に置いて、高次の K 群を定義する。

定義 1.2 (higher algebraic K-group [1])

小完全圏 \mathcal{P} と整数 $i \geq 0$ に対し、 i 次 K 群を次で定義する：

$$K_i(\mathcal{P}) := \pi_{i+1}(BQ\mathcal{P}, \{0\})$$

□

高次 K 群は、Waldhausen による違った構成もある。

单体的集合 $S_\bullet(\mathcal{P}) : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} ; [n] \mapsto S_n(\mathcal{P})$ を、

$$S_n(\mathcal{P}) := \{0 = E_{0,0} \rightarrow E_{0,1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n,0} \mid E_{i,j} \cong E_{i,0}/E_{j,0} \quad (0 < i \leq j \leq n)\}$$

により定める。

命題 1.3 ([2] §1.9.)

单体的 homotopy 同値

$$S_\bullet(\mathcal{P}) \simeq N_\bullet Q\mathcal{P}$$

がある。 □

従って、

$$K_i(\mathcal{P}) \cong \pi_{i+1}(|S_\bullet(\mathcal{P})|, \{0\})$$

がわかる。

¹ \mathcal{P} は加法圏で、 \mathbf{E} は短完全列の類 $(0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0) \in \mathbf{E}$ に対し、 i (resp. j) を admissible monomorphism (resp. epimorphism) と呼び、 $M' \xrightarrow{i} M$, (resp. $M \xrightarrow{j} M''$) で表す。

² 対象は \mathcal{P} と同じ、射は $C \leftarrow N \rightarrow D$ の形のもの、合成は pullback により定めた圏

定義 1.4 (exact cube)

小完全圏 \mathcal{P} , poset $I = \{- < 0 < +\}$ に対し, 関手 $E_\bullet : I^n \rightarrow \mathcal{P}$ が次をみたすとき, exact n -cube と呼ぶ: 任意の $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) \in \{-, 0, +\}^{n-1}$ と $1 \leq i \leq n$ に対し, 次は \mathcal{P} の 短完全列:

$$E_{j_1, \dots, j_{i-1}, -, j_i, \dots, j_{n-1}} \rightarrow E_{j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_i, \dots, j_{n-1}} \rightarrow E_{j_1, \dots, j_{i-1}, +, j_i, \dots, j_{n-1}}$$

□

つまり, exact 1-cube は通常の短完全列, exact 2-cube は正形状に, exact 3-cube は立方体状に, どの列も短完全列であるように並べたものである.

$C_n(\mathcal{P})$ で exact n -cube 全体の集合とし, $\mathbb{Z}C_n(\mathcal{P})$ でその自由 abel 群とする.

$1 \leq i \leq n-1$, $\alpha \in \{-, 0, +\}$, $E_\bullet \in C_n(\mathcal{P})$ に対して, $\partial_i^\alpha E_\bullet \in C_{n-1}(\mathcal{P})$ を,

$$(\partial_i^\alpha E_\bullet)_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} = E_{j_1, \dots, j_{i-1}, \alpha, j_i, \dots, j_{n-1}}$$

と定義すると, ∂_i^α は準同型 $\partial_i^\alpha : \mathbb{Z}C_n(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{Z}C_{n-1}(\mathcal{P})$ を引き起こす. そこで,

$$d := \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \pm, 0} (-1)^{i+\alpha+1} \partial_i^\alpha$$

とすると, $d^2 = 0$ となり, chain 複体 $(\mathbb{Z}C_*(\mathcal{P}), d)$ が定義される.

ところで, 各 $E \in C_n(\mathcal{P})$ に対し,

$$0 \rightarrow \partial_i^- E_\bullet \rightarrow \partial_i^0 E_\bullet \rightarrow \partial_i^+ E_\bullet \rightarrow 0$$

は $C_{n-1}(\mathcal{P})$ の完全列となるが, 逆に E_\bullet はこの完全列により特徴づけることができる. この小完全列を $\partial_i E_\bullet$ と表す.

$1 \leq i \leq n$, $\alpha \in \{-, +\}$, $E_\bullet \in C_n(\mathcal{P})$ に対して, $s_i^\alpha E_\bullet \in C_n(\mathcal{P})$ を, 次の完全列で定義する:

$$\partial_i s_i^- E_\bullet : 0 \rightarrow 0 \rightarrow E_\bullet \xrightarrow{1} E_\bullet \rightarrow 0$$

$$\partial_i s_i^+ E_\bullet : 0 \rightarrow E_\bullet \xrightarrow{1} E_\bullet \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

s_i^α も準同型 $s_i^\alpha : \mathbb{Z}C_{n-1}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{Z}C_n(\mathcal{P})$ を定める.

これらの像の和からなる $\mathbb{Z}C_n(\mathcal{P})$ の部分加群を D_n と表し,

$$\widetilde{\mathbb{Z}C}_*(\mathcal{P}) := \mathbb{Z}C_*(\mathcal{P})/D_*$$

を reduced exact cube complex と呼ぶ.

命題 1.5

$\mathbb{Z}S_*(\mathcal{P})$ を単体的集合 $S_\bullet(\mathcal{P})$ に付随する Moore 複体とする. このとき, chain 写像

$$\text{Cub} : \mathbb{Z}S_*(\mathcal{P})[1] \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Z}C}_*(\mathcal{P})$$

が存在する.

□

さらに, この chain 写像から homology 群に引き起こされる準同型と Hurewicz 準同型の合成も Cub と書ことにする.

$$\text{Cub} : K_n(\mathcal{P}) \cong \pi_{n+1}(S_\bullet(\mathcal{P})) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_{n+1}(\mathbb{Z}S_*(\mathcal{P})) \xrightarrow{\text{Cub}} H_n(\widetilde{\mathbb{Z}C}_*(\mathcal{P}))$$

定理 1.6 ([3], [4])

$$\text{Cub} : K_n(\mathcal{P}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_n(\widetilde{\mathbb{Z}C}_*(\mathcal{P}), \mathbb{Q})$$

2 応用

2.1 高次 Bott-Chern 形式

J.I.Bargos と S.Wang は [5] で滑らかな準射影的代数多様体 X 上の hermitian vector 束に対して、高次の Bott-Chern 形式を構成している.

Chern 指標 ch の高次 Bott-Chern 形式 $\widetilde{\text{ch}}_*$ を chain 写像

$$\begin{aligned} \text{ch} : \widetilde{\mathbb{Z}\bar{C}}_n^{\text{emi}}(X) &\longrightarrow \bigoplus_p \mathcal{D}^{2p-n}(X, p) \\ E_\bullet &\longmapsto \widetilde{\text{ch}}_n(E_\bullet) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{C}_n^{\text{emi}}(X)$ は X 上の hermitian vector 束の exact n -cube E_\bullet のうち、各 i について、 $E_{j_1, \dots, j_{i-1}, -, j_{i+1}, \dots, j_n}$ の hermitian 計量が $E_{j_1, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_n}$ から誘導されるもの全体の集合、 $\mathcal{D}^*(X, p)$ は実 Deligne cochain 複体である.

$\widetilde{\mathbb{Z}\bar{C}}_n^{\text{emi}}(X)$ は $\widetilde{\mathbb{Z}\bar{C}}_n(X)$ と chain homotopic になるので、homology の準同型 $H_n(\widetilde{\mathbb{Z}\bar{C}}_*(X)) \rightarrow \bigoplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n}(X, \mathbb{R}(p))$ が得られる.

定理 2.1 ([5], [6]Theorem8.8)

$$K_n(X) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_n(\widetilde{\mathbb{Z}\bar{C}}_*(X)) \xrightarrow{\text{ch}} \bigoplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n}(X, \mathbb{R}(p))$$

は Beilinson's regulator と一致する. □

また、Y. Takeda は [7] で高次の算術的 K 理論を定義し、[8] で、それに高次の Bott-Chern 形式を使うことによって Zagier 予想に対する Deligne と Beilinson による結果と同じ結果を得ている.

2.2 Adams 作用素

E.F.Trijuque は、[4] で Krull 次元が有限な既約 noetherian scheme X 上の局所自由層の K 群上の Adams 作用素を構成している.

局所自由層の exact n -cube E_\bullet に対し、これに含まれる全ての短完全列が分裂するとき、split exact n -cube と呼び、それらの成す部分加群を $\mathbb{Z}\text{Sp}_n(X)$ と書く.

まず、split exact cube 上には、Adams 作用素の chain 写像版が作れる.

$$\Psi^k : \mathbb{Z}\text{Sp}_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}C_n(X) \tag{2.1}$$

さらに、transgression と呼ばれる exact n -cube から $X \times \mathbb{P}^n$ 上の局所自由層を得る操作を通して、chain 写像

$$T : \mathbb{Z}C_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\text{Sp}_n^\square(X)$$

を構成する. ここで、 $\mathbb{Z}C_n^\square(X)$ は二重複体 $\mathbb{Z}C_*(X \times \square^*)$ の simple complex (total complex の (-1) -shift) で、 $\square = \mathbb{P}^1 \setminus \{1\} \cong \mathbb{A}^1$ である. (transgression は higher Bott-Chern form にも使っている.)

(2.1) から誘導される写像と、degenerate な成分を割った $\widetilde{\mathbb{Z}C}_n^\square(X)$ への射影を合成すると、

$$\Psi^k : \mathbb{Z}\text{Sp}_n^\square(X) \longrightarrow \mathbb{Z}C_n^\square(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Z}C}_n^\square(X)$$

を得るが, $\mathbb{Z}C_n^{\square}(X)$ は normalized complex $NC_n^{\square}(X)$ と同型であることを踏まえると, 次の chain map を得る:

$$NC_n(X) \hookrightarrow \mathbb{Z}C_n(X) \xrightarrow{T} \mathbb{Z}Sp_n^{\square}(X) \xrightarrow{\Psi^k} NC_n^{\square}(X)$$

これを改めて Ψ^k とする.

定理 2.2 ([4] Theorem4.4.2.)

この Ψ^k は写像

$$\Psi^k : K_n(K) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_n(K) \otimes \mathbb{Q}$$

を誘導し, これは Adams 作用素と一致する. □

参考文献

- [1] Daniel Quillen, *Higher Algebraic K-Theory. I*, In Algebraic K -theory, I: Higher K -theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972) , pages 85—147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.
- [2] Friedhelm Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces.*, In Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983) , volume 1126 of Lecture Notes in Math. , pages 318—419. Springer, Berlin, 1985.
- [3] R. McCarthy, *A chain complex for the spectrum homology of the algebraic K-theory of an exact category*, Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), Fields Inst. Commun., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 199—220.
- [4] Elisenda Feliu i Trijueque, *On Higher Arithmetic Intersection Theory* Ph.D Thesis (2007).
- [5] Jos Ignacio Burgos and Steve Wang, *Higher Bott-Chern forms and Beilinson's regulator*, Invent. math. 132(1998), 261-305.
- [6] Jos Ignacio Burgos Gil *Hermitian vector bundles and characteristic classes*The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998) CRM Proc. Lecture Notes 24, 155182 Amer. Math. Soc. 2000
- [7] Yuichiro Takeda *Higher arithmetic K-theory*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41(2005), no. 3,599—681.
- [8] Yuichiro Takeda *Complexes of exact hermitian cubes and the Zagier conjecture*, Math. Ann. 328 (2004), 87-119.

\mathbb{C}^2 内代数曲線の braid monodromy

石地 知興

東京工業大学大学院 理工学研究科 数学専攻
修士 1年

1. 準備.

Definition 1 (Braid group)

D を closed disk とし, $K \subset \text{Int } D$ を finite set とする.

$B := \{ \beta : D \rightarrow D \text{ diffeomorphism} \mid \beta(K) = K, \beta|_{\partial D} = \text{id}_{\partial D} \}$ とする. B は写像の合成を演算とし群となる.

B に次の関係を定義する:

$$u \in \partial D \text{ とし, } \beta_1, \beta_2 \in B \text{ に対して}$$
$$\beta_1 \sim \beta_2 \iff (\beta_1|_{D-K})_* = (\beta_2|_{D-K})_* : \pi_1(D-K, u) \xrightarrow{\cong} \pi_1(D-K, u)$$

すると, " \sim " は同値関係となる.

そこで, $B_n[D, K] := B / \sim$ と定め ($n = |K|$)

$[\beta_1], [\beta_2] \in B_n[D, K]$ に対し,

$[\beta_1] \cdot [\beta_2] = [\beta_1 \circ \beta_2]$ という演算を入れる.

すると $B_n[D, K]$ は群となる.

$B_n[D, K]$ を braid group という.

Definition 2 (Motion)

D, K を Definition 1 のとおりとする. $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ とする.

このとき,

K から K への motion

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{def. } & \exists n \text{ continuous maps } m_i : [0, 1] \rightarrow D \\ & \text{s.t. } \forall i, m_i(0) = a_i, m_i(1) = a_{\sigma(i)} \ (\sigma \in S_n), \\ & i \neq j \Rightarrow \forall t \in [0, 1], m_i(t) \neq m_j(t). \end{aligned}$$

Remark

K から K への motion に対して $B_n[D, K]$ の元が定まる。

Definition 3 (アフィン平面代数曲線)

$f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ を n 次多項式とする。ただし、 $f \neq 0$ で、 $n \geq 1$ とする。このとき $f(x, y)$ で定義される n 次アフィン平面代数曲線という:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

ここでは、次の形のアフィン曲線を扱う:

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x).$$

ただし、 $f(x, y)$ は n 次式で"被約 (因数分解したとき重複因子が現れない)", $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ とする。

2. Braid monodromy.

\mathbb{C}^2 内のアフィン平面代数曲線 C に対し braid monodromy を定義する。

1. 準備 における設定のもと,

$$\pi: \begin{array}{c} C \\ \downarrow \\ (x, y) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbb{C} \\ \downarrow \\ x \end{array} \quad \text{projection, } N := \{x \in \mathbb{C} \mid |\pi^{-1}(x)| < n\}$$

とし、 $\text{Int } E \supset N$ となるような x 軸上の closed disk E を $\forall x \in E, \pi^{-1}(x) \subset \{x\} \times \text{Int } D$ となるような y 軸上の closed disk D をとる。

$$\bar{C} := C \cap (E \times D) \text{ とする。}$$

$m \in \partial E$ を選ぶ。 $K := \pi^{-1}(m)$ とする。 $|K| = n$ に注意する。

このとき $E \times D, \pi, m$ に関する \bar{C} の braid monodromy $\varphi: \pi_1(E - N, m) \rightarrow B_n[\{m\} \times D, K]$ を以下のように定義する:

- ① $E-N$ 内の m を基点とする loop ℓ をとる。
すなわち, $\ell: [0, 1] \rightarrow E-N$ continuous map,
 $\ell(0) = \ell(1) = m$.
- ② ℓ の C への lift $\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n$ をとる.
- ③ $\pi': C \rightarrow \{m\} \times D$
 $(x, y) \mapsto (m, y)$ とする.
path $\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n$ に対して,
 $\pi' \circ \tilde{\ell}_1, \dots, \pi' \circ \tilde{\ell}_n$ は K から K への motion とする.
この motion から定まる braid を
 $\gamma([\ell]) \in B_n[\{m\} \times D, K]$
とする.

Remark

上の定義は well-defined で, γ は 準同型写像となる.

参考文献

- [1] B. Moishezon and M. Teicher, Braid group technique in complex geometry I, Line arrangements in $\mathbb{C}P^2$, Contemporary Math. 78, 425-555 (1988).
- [2] 小木曾啓示 『代数曲線論』 (朝倉書店) 2002.